OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. La empresa puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo a la semana. Se sabe que el montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo, y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil necesita 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcule el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y obtenga dicho beneficio.

Solución

"x" = Nº ordenadores fijos.
"y" = Nº ordenadores portátiles.
Función Objetivo = Beneficio = **F(x,y) = 100x + 150y**. (fijo, beneficio de 100€; portátil, beneficio de 150€)

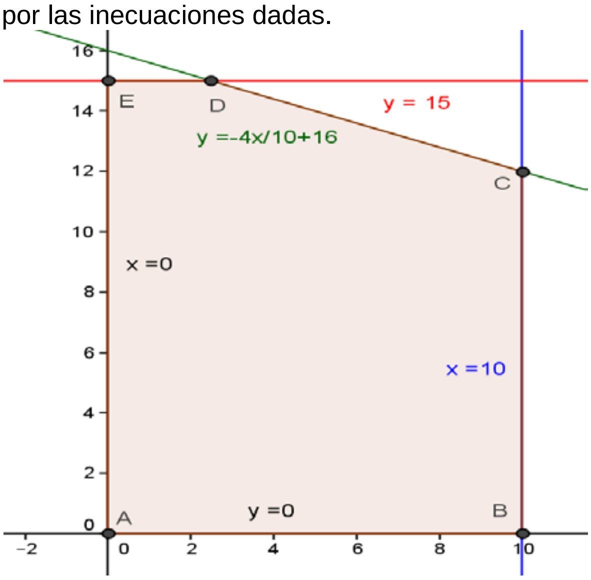
Restricciones:

Puede montar como máximo 10 fijos a la semana → $x \le 10$.
Puede montar como máximo 15 portátiles a la semana → $y \le 15$.
Montaje de un fijo requiere 4 horas, portátil necesita 10 horas de trabajo,
se dispone de 160 horas a la semana → $4x + 10y \le 160$.
Se fabricará algún ordenador. → $x \ge 0$ e $y \ge 0$

Las desigualdades $x \le 10$; $y \le 15$; $4x + 10y \le 160$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya **son rectas,** $x = 10$; $y = 15$; $4x + 10y = 160$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$x = 10$; $y = 15$; $y = -4x/10 + 16$; $x = 0$; $y = 0$**;**

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De $y = 0$ y $x = 10$, tenemos el punto de corte es B(10,0)
De $x = 10$ e $y = -4x/10 + 16$, tenemos $y = 12$, y el punto de corte es C(10,12)
De $y = -4x/10+16$ e $y = 15$; tenemos $-4x/10+16 = 15$, luego $10 = 4x$ y $x = 10/4 = 2'5$ (absurdo). El punto de corte es D(2'5,15).
De $x = 0$ e $y = 15$, tenemos el punto de corte es E(0,15)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0), B(10,0), C(10,12), D(2'5,15) y E(0,15)**.**

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 100x + 150y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(10,0), C(10,12), D(2'5,15) y E(0,15). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 100(0) + 150(0) =0; F(10,0) = 100(10) + 150(0) = 1000; **F(10,12)** = 100(10) + 150(12) **= 2800**; F(2'5,15) = 100(2'5) + 150(15) = 2500; F(0,15) = 100(0) + 150(15) = 2250;

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 2800** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(100,12), es decir el beneficio máximo es de 28000€ y se alcanza montando 100 ordenadores fijos y 12 ordenadores portátiles**.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Para *a* = −2 represente gráficamente la función *f*, e indique sus extremos relativos.
b) (1'5 puntos) Determine el valor de *a* para que la función *f* sea derivable.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$

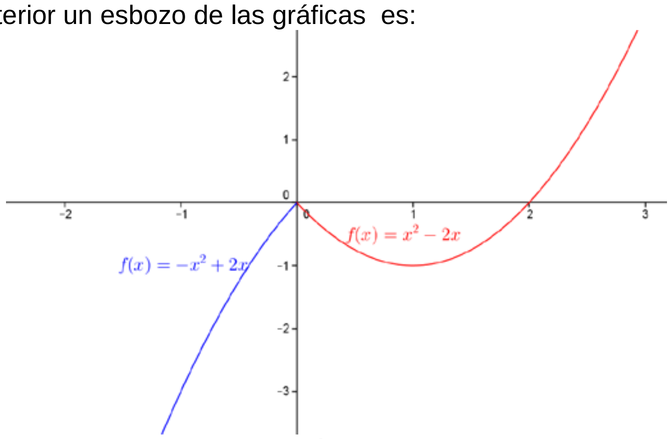
a)
Para a = -2 represente gráficamente la función f, e indique sus extremos relativos.

Para a = -2 tenemos $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Si $x \le 0$, $f(x) = -x^2 + 2x$.
Su gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo (∩), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo (-), luego es cóncava (en Andalucía). La abscisa de su vértice V es la solución de f '(x) = 0, es decir -2x + 2 = 0, de donde x = 1, y V(1,f(1)) = V(1,1). Los puntos de corte son:
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,0).
Para f(x) = 0, $-x^2 + 2x = 0 = x(-x + 2)$, de donde x = 0 y x = 2(No está en su dominio). Punto (0,f(0)) = (0,0).

Si x > 0, $f(x) = x^2 - 2x$.
Su gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba (∪), porque el nº que multiplica a x^2 es positivo (+), luego es convexa (en Andalucía). La abscisa de su vértice V es la solución de f'(x) = 0, es decir 2x – 2 = 0, de donde x = 1, y V(1,f(1)) = V(1,-1).
Los puntos de corte son:
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,0).
Para f(x) = 0, $x^2 - 2x = 0 = x(x - 2)$, de donde x = 0(No está en su dominio) y x = 2. Punto (2,f(2)) = (2,0).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es:



Mirando la gráfico vemos que el punto (0,0) es un máximo relativo y el punto (1,-1) es un mínimo relativo.
b)
Determine el valor de *a* para que la función *f* sea derivable.

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua.

$-x^2+2x$ es un función polinómica, por tanto continua y derivable en R, en particular en x < 0.
x^2-2x es un función polinómica, por tanto continua y derivable en R, en particular en x > 0.
Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 0

Como f es continua en x = 0, tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x)$.
$f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} (-x^2+2x) = 0$.
$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^2-2x) = 0$. Como ambas expresiones son iguales, f es continua en x = 0 independientemente del valor de "a", por tanto **f es continua en R**.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} -x^2+2x & \text{si } x \le 0 \\ x^2+ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$, de donde: $f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{si } x \le 0 \\ 2x+a & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Como f es derivable en x = 0, tenemos f'(0+) = f'(0-), es decir $\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).
$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} (-2x+2) = 2$.
$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (2x+a) = a$, por tanto como es derivable en x = 0 tenemos **a = 2**.

EJERCICIO 3_A

Parte I

En un concurso se dispone de cinco sobres; dos de ellos contienen premio y los otros tres no. Se pide a un primer concursante que escoja un sobre y observe si tiene premio, y a un segundo concursante que elija otro de los restantes y observe si tiene premio.
a) (1 punto) Escriba el conjunto de resultados posibles asociado a este experimento e indique la probabilidad de cada uno de ellos.
b) (1 punto) ¿Qué probabilidad tiene el segundo concursante de obtener premio? ¿Cuál es la probabilidad de que ambos concursantes obtengan premio?

Solución

En un concurso se dispone de cinco sobres; dos de ellos contienen premio y los otros tres no. Se pide a un primer concursante que escoja un sobre y observe si tiene premio, y a un segundo concursante que elija otro de los restantes y observe si tiene premio.
a)
Escriba el conjunto de resultados posibles asociado a este experimento e indique la probabilidad de cada uno de ellos.

Llamemos A_1, A_1^C, B_2 y B_2^C, a los sucesos siguientes, "concursante 1º tiene premio", "concursante 1º no tiene premio", "concursante 2º tiene premio" y "concursante 2º no tiene premio", respectivamente.

Sabemos que $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B/A)$; $p(A^C) = 1 - p(A)$.

El conjunto de resultados es $\{ A_1\cap B_2, A_1\cap B_2^C, A_1^C\cap B_2, A_1^C\cap B_2^C\}$. Las probabilidades son:
$p(A_1\cap B_2) = p(A_1)\cdot p(B_2/A_1) = (2/5)\cdot(1/4) = 1/10 = 0'1$
$p(A_1\cap B_2^C) = p(A_1)\cdot p(B_2^C/A_1) = (2/5)\cdot(3/4) = 3/10 = 0'3$
$p(A_1^C\cap B_2) = p(A_1^C)\cdot p(B_2/A_1^C) = (3/5)\cdot(2/4) = 3/10 = 0'3$
$p(A_1^C\cap B_2^C) = p(A_1^C)\cdot p(B_2^C/A_1^C) = (3/5)\cdot(2/4) = 3/10 = 0'3$

b)
¿Qué probabilidad tiene el segundo concursante de obtener premio? ¿Cuál es la probabilidad de que ambos concursantes obtengan premio?

Mirando el conjunto de resultados tenemos que:
p(el segundo concursante de obtener premio) = $p(A_1\cap B_2) + p(A_1^C\cap B_2) = 0'1 + 0'3$ **= 0'4**.
p(ambos concursantes tienen) = $p(A_1\cap B_2)$ **= 0'1**.

EJERCICIO 3_A

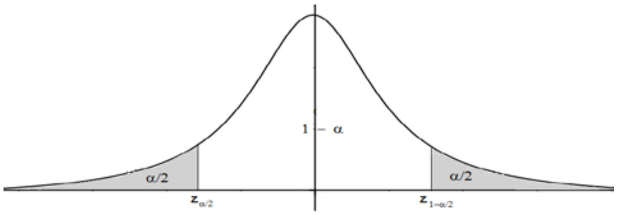
Parte II

Se supone que la puntuación obtenida por cada uno de los tiradores participantes en la sede de Gádor de los "Juegos Mediterráneos Almería 2005", es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con

desviación típica 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 que da una media de 35 puntos.
a) (1 punto) Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para la puntuación media del total de tiradores.
b) (1 punto) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de tiradores, con un error inferior a 1 punto y con un nivel de confianza del 99%.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x} = (a + b)/2$*, el <u>error máximo</u> de la estimación es* $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es* $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$*, de donde* $E = (b - a)/2$*, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

Se supone que la puntuación obtenida por cada uno de los tiradores participantes en la sede de Gádor de los "Juegos Mediterráneos Almería 2005", es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 que da una media de 35 puntos.

a)

Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para la puntuación media del total de tiradores.

Datos del problema: $\sigma = 6$, $n = 36$, $\overline{x} = 35$, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(35 - 1'96\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}, 35 + 1'96\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}\right)$$ **= (33'04, 36'96).**

b)

Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de tiradores, con un error inferior a 1 punto y con un nivel de confianza del 99%.

Datos del problema: $\sigma = 6$, $E \le 1$, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y que una de la más próxima es 0'9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'57$.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'57\cdot 6}{1}\right)^2 = 237'7764$, tenemos que **el tamaño mínimo es n = 238**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule, si existe, la matriz inversa de *B*.
b) (2 puntos) Si A·B = B·A y $A + A^t = 3\cdot I_2$, calcule x e y.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a)
Calcule, si existe, la matriz inversa de *B*.

Dada la matriz B si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de (B|I) a (I|D) la matriz D es la inversa de B, es decir $D = B^{-1}$. También podemos calcularla con la fórmula $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t)$.

$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) F_1 + F_2 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) F_2/2 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) = (I|B^{-1})$, luego

$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Veámoslo por la fórmula:

$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2$; $B^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, luego $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\cdot Adj(B^t) = (1/-2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, que vemos que es la misma.

b)
Si A·B = B·A y $A + A^t = 3\cdot I_2$, calcule x e y.

$A\cdot B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y & 2x \\ x+y & -2y \end{pmatrix}$

$B\cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-2y & 2x-y \\ x & y \end{pmatrix}$

Igualando tenemos: -x+y = -x-2y; 2x = 2x-y; x+y = x; -2y = y, de donde **y = 0** y **x = x.**

$A + A^t = 3\cdot I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Igualando tenemos: 2x = 3 de donde **x = 3/2.**
Luego los valores pedidos son x = 3/2 e y = 0.

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

a) (2 puntos) Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía.
b) (1 punto) Represente gráficamente esta función.

Solución

Sea la función $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

(a) y (b)
Determine su dominio, puntos de corte con los ejes, las asíntotas y la monotonía. Represente gráficamente esta función.

Sabemos que el **dominio** de las funciones racionales es = R – {n^os^ anulan denominador} **= R – {-2}.**
Puntos de corte:

Para x = 0, punto (0,f(0)) = **(0,1/2).**
Para f(x) = 0 $\rightarrow$ x+1 = 0, de donde x = -1. Punto **(-1,0).**

Sabemos que los cocientes de funciones polinómicas tienen una asíntota horizontal (A.H.) si coincide el grado del numerador con el del denominador, que es nuestro caso, y además dicha A.H. es la misma en $\pm\infty$.

También sabemos que los números que anulan el denominador son asíntotas verticales (A.V.), si el límite en dicho número es ∞, que también es nuestro caso.

Tenemos $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, cuya grafica es una hipérbola y sabemos tiene una A.V. y una A.H.

El número que anula el denominador (x+2=0) es x = -2, y como $\lim_{x\to -2^-} \frac{x+1}{x+2} = -1/0^- = +\infty$, la recta x = -2 es una A.V. de f. Además a la izquierda del -2, f está en $+\infty$.

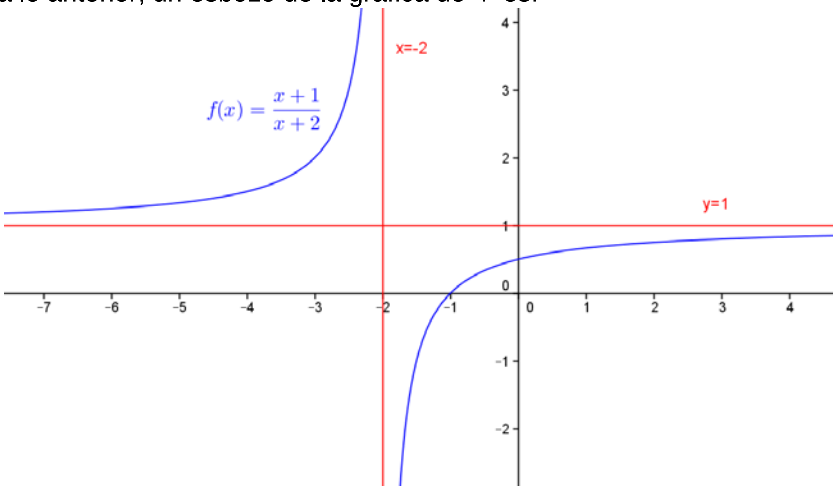
De $\lim_{x\to 2+} \frac{x+1}{x+2} = -1/0^+ = -\infty$, luego a la derecha del -2, f está en $-\infty$.

Como $\lim_{x\to +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x\to +\infty} (x/x) = \lim_{x\to +\infty} (1) = 1$, la recta y = 1 es una A.H. en $\pm\infty$.

De $\lim_{x\to +\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} - 1\right) = 0^-$, tenemos que f está por debajo de la A.H. en $+\infty$.

De $\lim_{x\to -\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} - 1\right) = 0^+$, tenemos que f está por encima de la A.H. en $-\infty$.

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica de f es:



Observando la gráfica vemos que f es **estrictamente creciente en su dominio** R – {-2}
También se podría comprobar viendo que f '(x) es > 0 en su dominio.

EJERCICIO 3_B

Parte I

Juan dispone de dos días para estudiar un examen. La probabilidad de estudiarlo solamente el primer día es del 10%, la de estudiarlo los dos días es del 10% y la de no hacerlo ningún día es del 25%. Calcule la probabilidad de que Juan estudie el examen en cada uno de los siguientes casos:
a) (0'5 puntos) El segundo día.
b) (0'75 puntos) Solamente el segundo día.
c) (0'75 puntos) El segundo día, sabiendo que no lo ha hecho el primero.

Solución

Juan dispone de dos días para estudiar un examen. La probabilidad de estudiarlo solamente el primer día es del 10%, la de estudiarlo los dos días es del 10% y la de no hacerlo ningún día es del 25%. Calcule la probabilidad de que Juan estudie el examen en cada uno de los siguientes casos:
a)
El segundo día.

Sean los sucesos A y B los sucesos "estudiar el primer día" y "estudiar los dos días" respectivamente.
Datos del problema: $p(A \text{ y no}B) = p(A\cap B^C) = 10\% = 0'1$, $p(A\cap B) = 10\% = 0'1$ y $p(A^C\cap B^C) = 25\% = 0'25$.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A^C) = 1 - p(A)$; $p(A^C\cap B^C) = \{\text{ley de Morgan}\} = p(A\cup B)^C =$

= {suceso contrario} = 1 - $p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$; $p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$.

Me piden p(B).

Tenemos $p(A\cap B^C)$ = = 0'1 = $p(A) - p(A\cap B)$, de donde *p(A)* = 0'1 + $p(A\cap B)$ = 0'1 + 0'1 = *0'2*.

De $p(A^C\cap B^C)$ = 0'25 = 1 - $p(A\cup B)$; tenemos *$p(A\cup B)$* = 1 – 0'25 = *0'75*.

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos **p(B)** = $p(A\cup B) + p(A\cap B) - p(A)$ = 0'75 + 0'1 – 0'2 **= 0'65.**

b)

Solamente el segundo día.

Me pide **p(noA y B) =** $p(A^C\cap B) = p(B) - p(A\cap B)$ = 0'65 – 0'1 = **0'55.**

c)

El segundo día, sabiendo que no lo ha hecho el primero.

Me piden **$p(B/A^C)$** = $\dfrac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B) - p(A\cap B)}{1 - p(A)}$ = (0'65 – 0'1)/(1 – 0'2) = 0'55/ 0'8 **= 0'6875.**

EJERCICIO 3_B

Parte II

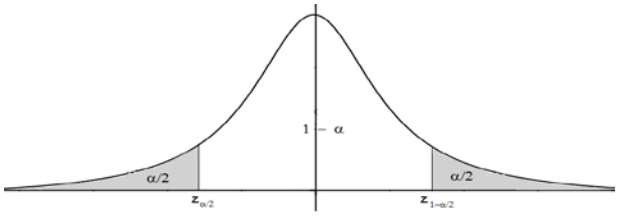
El peso de los cerdos de una granja sigue una ley Normal con desviación típica 18 kg.

a) (1 punto) Determine el tamaño mínimo de una muestra para obtener un intervalo de confianza, para la media de la población, de amplitud 5 kg con un nivel de confianza del 95%.

b) (1 punto) Si la media de los pesos de los cerdos de la granja fuera 92 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 100 cerdos estuviese entre 88 y 92 kg?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.\ (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el <u>tamaño mínimo</u> de la muestra es n =* $\left(\dfrac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\dfrac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2$.

El peso de los cerdos de una granja sigue una ley Normal con desviación típica 18 kg.

a)

Determine el tamaño mínimo de una muestra para obtener un intervalo de confianza, para la media de la población, de amplitud 5 kg con un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema: σ = 18, amplitud = b – a = 5, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es:

De $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b - a}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot 1'96\cdot 18}{5}\right)^2$ = 199’15. El tamaño de la muestra es **n = 200.**

b)
Si la media de los pesos de los cerdos de la granja fuera 92 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 100 cerdos estuviese entre 88 y 92 kg?

Datos del problema: σ = 18, $\overline{x}$ = 92, n = 100.

La distribución de las medias muestrales es $\overline{X} \rightarrow N(\overline{x}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(92, \frac{18}{\sqrt{100}}) = N(92, 1'8) = N(9, 0'5)$

Me están pidiendo la probabilidad “p(88 $\le \overline{X} \le$ 92)”

Luego p(88 $\le \overline{X} \le$ 92) = {tipificamos} = $p(\frac{88 - 92}{1'8} \le Z \le \frac{92 - 92}{1'8})$ = p(-2’22 $\le$ Z $\le$ 0’00) =
= p(Z $\le$ 0’00) - p(Z $\le$ - 2’22) = p(Z $\le$ 0’00) – [1 - p(Z $\le$ 2’22)] = {Mirando en la tabla} =
= 0’5 – (1 – 0’9868) **= 0’4868.**