

**OPCIÓN A****EJERCICIO 1\_A**

(3 puntos) Una imprenta local edita periódicos y revistas. Para cada periódico necesita un cartucho de tinta negra y otro de color, y para cada revista uno de tinta negra y dos de color. Si sólo dispone de 800 cartuchos de tinta negra y 1100 de color, y si no puede imprimir más de 400 revistas, ¿cuánto dinero podrá ingresar como máximo, si vende cada periódico a 0'9 euros y cada revista a 1'2 euros?

**Solución**

“x” = Número de periódicos.

“y” = Número de revistas.

Función Objetivo  $F(x,y) = 0'9x + 1'2y$ . (vende cada periódico a 0'9€ y cada revista a 1'2€)

Restricciones:

	Periódicos	Revistas	Cantidad
Tinta negra	1	1	800
Tinta color	1	2	1100

Tinta negra (hay 800): un cartucho para periódico y otro para revista  $\rightarrow x + y \leq 800$ .

Tinta color (hay 1100): un cartucho para periódico y dos para revista  $\rightarrow x + 2y \leq 1100$ .

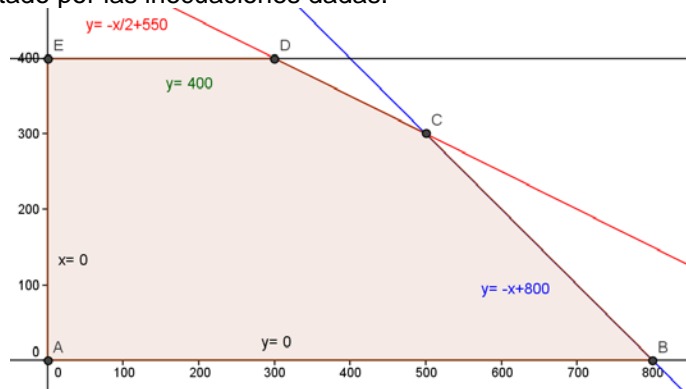
No puede imprimir más de 400 revistas.  $\rightarrow y \leq 400$

Se edita algún periódico y alguna revista.  $\rightarrow x \geq 0$  e  $y \geq 0$

Las desigualdades  $x + y \leq 800$ ;  $x + 2y \leq 1100$ ;  $y \leq 400$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , las transformamos en igualdades, y ya son rectas,  $x + y = 800$ ;  $x + 2y = 1100$ ;  $y = 400$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ .

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos  $y = -x + 800$ ;  $y = -x/2 + 550$ ;  $y = 400$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De  $x = 0$  e  $y = 0$ . El punto de corte es A(0,0)

De  $y = 0$  e  $y = -x + 800$ , tenemos  $0 = -x + 800$  es decir  $x = 800$ . El punto de corte es B(800,0)

De  $y = -x + 800$  e  $y = -x/2 + 550$ ; tenemos  $-x + 800 = -x/2 + 550$ , es decir  $-2x + 1600 = -x + 1100$ , luego  $x = 500$  e  $y = 300$ . El punto de corte es C(500,300)

De  $y = 400$  e  $y = -x/2 + 550$ ; tenemos  $400 = -x/2 + 550$ , es decir  $800 = -x + 1100$ , luego  $x = 300$ , y el punto de corte es D(300,400)

De  $x = 0$  e  $y = 400$ . Tenemos el punto de corte es E(0,400)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0;0), B(800,0), C(500;300), D(300,400) y E(0;400).

Calculamos el máximo de la función  $F(x,y) = 0'9x + 1'2y$  en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0;0), B(800,0), C(500;300), D(300,400) y E(0;400). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(0,0) = 0'9 \cdot (0) + 1'2(0) = 0$ ;  $F(800,0) = 0'9 \cdot (800) + 1'2(0) = 720$ ;  $F(500,300) = 0'9 \cdot (500) + 1'2(300) = 810$ ;

$$F(300,400) = 0'9 \cdot (300) + 1'2(400) = 750; \quad F(0,400) = 0'9 \cdot (0) + 1'2(400) = 480.$$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 810** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(500,300)**, es decir el número beneficio máximo es de 810€ y se alcanza editando 500 periódicos y 300 revistas.

### EJERCICIO 2\_A

Sean las funciones  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  y  $g(x) = 2x - x^2$ .

a) (2 puntos) Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Representélas gráficamente.

b) (1 punto) Determine el valor de  $x$  para el que se hace mínima la función  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

#### Solución

Sean las funciones  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  y  $g(x) = 2x - x^2$ .

a)

Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Representélas gráficamente.

$$f(x) = x^2 - 4x + 6.$$

Su gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba ( $\cup$ ), porque el  $n^\circ$  que multiplica a  $x^2$  es positivo (+), luego es convexa (en Andalucía. Después veremos que  $f''(x) > 0$ ). La abscisa de su vértice  $V$  es la solución de  $f'(x) = 0$ , es decir  $2x - 4 = 0$ , de donde  $x = 2$ , y  $V(2, f(2)) = V(2, 2)$ .

Los puntos de corte son:

Para  $x = 0$ , punto  $(0, f(0)) = (0, 6)$ .

Para  $f(x) = 0$ ,  $x^2 - 4x + 6 = 0$ , de donde  $x = \frac{4 \pm \sqrt{14 - 24}}{2}$ , y no tiene soluciones reales, por tanto no corta al

eje  $OX$  (lo podríamos ver antes por la forma de la parábola y el punto vértice que es el mínimo absoluto).

$$f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad f'(x) = 2x - 4, \quad f''(x) = 2 > 0, \text{ luego } f \text{ es convexa } (\cup).$$

$$g(x) = 2x - x^2.$$

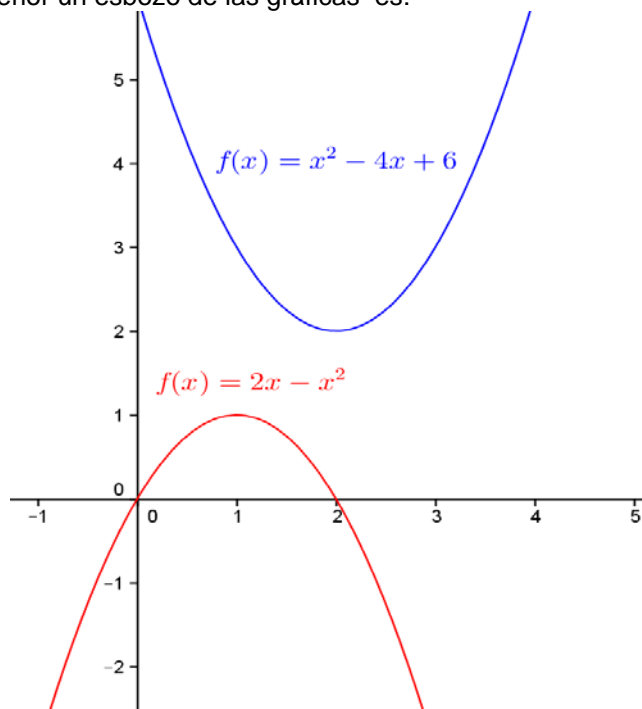
Su gráfica es una parábola con las ramas hacia abajo ( $\cap$ ), porque el  $n^\circ$  que multiplica a  $x^2$  es negativo (-), luego es cóncava (en Andalucía. Después veremos que  $g''(x) < 0$ ). La abscisa de su vértice  $V$  es la solución de  $g'(x) = 0$ , es decir  $2 - 2x = 0$ , de donde  $x = 1$ , y  $V(1, g(1)) = V(1, 1)$ . Los puntos de corte son:

Para  $x = 0$ , punto  $(0, g(0)) = (0, 0)$ , (no está en el dominio).

Para  $f(x) = 0$ ,  $2x - x^2 = 0 = x(2 - x)$ , de donde  $x = 0$  y  $x = 2$ . Puntos  $(0, g(0)) = (0, 0)$  y  $(2, g(2)) = (2, 0)$ .

$$g(x) = 2x - x^2, \quad g'(x) = 2 - 2x, \quad g''(x) = -2 < 0, \text{ luego } g \text{ es cóncava } (\cap).$$

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de las gráficas es:



b)

Determine el valor de  $x$  para el que se hace mínima la función  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 4x + 6) - (2x - x^2) = 2x^2 - 6x + 6.$$

Si  $h'(a) = 0$  y  $h''(a) > 0$ ,  $x = a$  es un mínimo relativo.

Vemos que la gráfica de  $h$  es una parábola con las ramas hacia arriba, luego su vértice es un mínimo relativo y absoluto.

$$h(x) = 2x^2 - 6x + 6; \quad h'(x) = 4x - 6; \quad h''(x) = 4.$$

De  $h'(x) = 0$ , tenemos  $4x - 6 = 0$ , luego  $x = 6/4 = 3/2 = 1'5$ .

Como  $h''(1'5) = 4 > 0$ ,  $x = 1'5$  es un mínimo relativo y vale  $h(1'5) = 2(1'5)^2 - 6(1'5) + 6 = 3/2 = 1'5$ .

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte I

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $p(A^c) = 0'60$ ,  $p(B) = 0'25$  y  $p(A \cup B) = 0'55$ .

a) (1 punto) Razone si  $A$  y  $B$  son independientes.

b) (1 punto) Calcule  $p(A^c \cup B^c)$ .

#### Solución

Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos tales que  $p(A^c) = 0'60$ ,  $p(B) = 0'25$  y  $p(A \cup B) = 0'55$ .

a)

Razone si  $A$  y  $B$  son independientes.

Del problema tenemos  $p(A^c) = 0'60$ ,  $p(B) = 0'25$  y  $p(A \cup B) = 0'55$ .

Sabemos que  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ ;  $A$  y  $B$  son independientes si  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ ;  
 $p(A^c) = 1 - p(A)$ ;  $p(A^c \cup B^c) = \{\text{Ley de Morgan}\} = p(A \cap B)^c = \{\text{suceso contrario}\} = 1 - p(A \cap B)$ .

De  $p(A^c) = 1 - p(A)$ , tenemos  $p(A) = 1 - 0'6 = 0'4$ .

De  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ , tenemos  $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0'4 + 0'25 - 0'55 = 0'1$ .

Como  $0'1 = 0'4 \cdot 0'25$ , tenemos que  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$  y **los sucesos A y B son independientes**.

Calcule la probabilidad de que un cliente ni compre, ni solicite la colaboración de los dependientes.

b)

Calcule  $p(A^c \cup B^c)$ .

Tenemos  $p(A^c \cup B^c) = \{\text{Ley de Morgan}\} = p(A \cap B)^c = \{\text{suceso contrario}\} = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0'1 = 0'9$ .

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte II

(2 puntos) De 500 encuestados en una población, 350 se mostraron favorables a la retransmisión de debates televisivos en tiempos de elecciones.

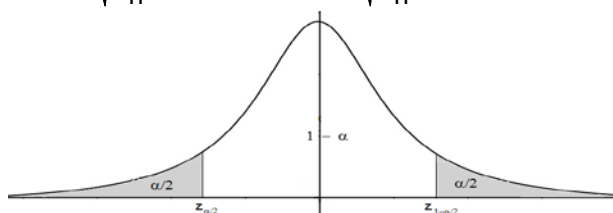
Calcule un intervalo de confianza, al 99'5%, para la proporción de personas favorables a estas retransmisiones.

#### Solución

Sabemos que si  $n \geq 30$  para la proporción muestral  $p$ , el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL  $\hat{p}$  sigue

una normal  $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}})$  que es la distribución muestral de proporciones, donde  $\hat{q} = 1 - \hat{p}$ , y

generalmente escribimos  $p \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}})$  o  $p \rightarrow N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}})$ .



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción  $p$  de las muestras es:

$$I.C.(p) = \left( \hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right) = (b-a)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \sim N(0,1)$  que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ .

El error cometido es  $E < z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (b-a)/2$ , de donde el tamaño de la muestra es  $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2}$ .

De 500 encuestados en una población, 350 se mostraron favorables a la retransmisión de debates televisivos en tiempos de elecciones.

Calcule un intervalo de confianza, al 99'5%, para la proporción de personas favorables a estas retransmisiones.

Datos del problema:  $\hat{p} = 350/500 = 0'7$ ,  $\hat{q} = 1 - 0'7 = 0'3$ ,  $n = 500$ , nivel de confianza  $1 - \alpha = 99'5\% = 0'995$ , de donde  $\alpha = 0'005 = 0'5\%$  como *nivel de significación*.

De  $\alpha = 0'005$  tenemos  $\alpha/2 = 0'0025$

De la igualdad  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'0025 = 0'9975$ , que se mira en la tabla de la distribución Normal  $N(0,1)$ , y nos dará el correspondiente valor crítico  $z_{1-\alpha/2}$ . Mirando en la tabla de la  $N(0,1)$  vemos que el valor 0'9975 viene en la tabla y corresponde a  $z_{1-\alpha/2} = 2'81$ . Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(p) = \left( \hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right) = \left( 0'7 - 2'81 \cdot \sqrt{\frac{0'7 \cdot 0'3}{500}}, 0'7 + 2'81 \cdot \sqrt{\frac{0'7 \cdot 0'3}{500}} \right) \cong$$

$$\cong (0'6421; 0'7576)$$

## OPCIÓN B

### EJERCICIO 1\_B

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a) (1'5 puntos) Calcule  $A^{-1} \cdot (2B + 3I_3)$ .

b) (1'5 puntos) Determine la matriz  $X$  para que  $X \cdot A = A + I_2$ .

#### Solución

Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

a)

Calcule  $A^{-1} \cdot (2B + 3I_3)$ .

Dada la matriz  $A$  si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de  $(A|I)$  a  $(I|D)$  la matriz  $D$  es la inversa de  $A$ , es decir  $D = A^{-1}$ . También podemos calcularla con la fórmula  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t)$ .

$$(A|I) = \left( \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2 \end{array} \approx \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ F_2 + 2 \cdot F_1 \end{array} \approx \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \cdot (-1) \\ F_2 \cdot (-1) \end{array} = (I|A^{-1}), \text{ luego}$$

$$\approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Veámoslo por la fórmula:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1; \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \text{ luego } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } A^{-1} \cdot (2B + 3I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left( 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}.$$

b)

Determine la matriz  $X$  para que  $X \cdot A = A + I_2$ .

Multiplicando la expresión  $X \cdot A = A + I_2$ . Por la derecha por  $A^{-1}$  tenemos  $X \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} + I_2 \cdot A^{-1}$ , de donde

$$X \cdot I_2 = I_2 + A^{-1} = X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**EJERCICIO 2\_B**

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto)  $f(x) = \frac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$ .    b) (1 punto)  $g(x) = (x^2+2) \cdot L(x^2+2)$ .  
 c) (1 punto)  $h(x) = 3^{5x} + e^x$

**Solución**

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (1 punto)  $f(x) = \frac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$ .    b) (1 punto)  $g(x) = (x^2+2) \cdot L(x^2+2)$ .  
 c) (1 punto)  $h(x) = 3^{5x} + e^x$ .

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También algo sobre extremos absolutos

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x); (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x); \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2};$$

$$((f(x))^k)' = k \cdot f(x)^{k-1} \cdot f'(x); (a^x)' = a^x \cdot \ln(a); (e^{kx})' = k \cdot e^{kx}; (x^k)' = k \cdot x^{k-1}; (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}; (k)' = 0.$$

$$f(x) = \frac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$$

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot x - (1-3x) \cdot 1}{(x)^2} + 3 \cdot (5x-2)^2 \cdot 5 = \frac{-1}{x^2} + 15 \cdot (5x-2)$$

$$g(x) = (x^2+2) \cdot L(x^2+2)$$

$$g'(x) = 2x \cdot L(x^2+2) + (x^2+2) \cdot \frac{2x}{x^2+2} = 2x \cdot L(x^2+2) + \frac{2x^3+4x}{x^2+2}$$

$$h(x) = 3^{5x} + e^x$$

$$h'(x) = 3^{5x} \cdot \ln(3) \cdot 5 + e^x = 5 \cdot \ln(3) \cdot 3^{5x} + e^x$$

**EJERCICIO 3\_B**Parte I

Una urna contiene tres bolas azules y cuatro rojas. Se extraen al azar tres bolas sucesivamente con reemplazamiento.

- a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que las tres sean del mismo color.  
 b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que dos sean azules y una roja.

**Solución**

Una urna contiene tres bolas azules y cuatro rojas. Se extraen al azar tres bolas sucesivamente con reemplazamiento.

a)

Calcule la probabilidad de que las tres sean del mismo color.

Sean  $A_i$  y  $R_i$  los sucesos "sacar bola azul en la extracción número  $i$ " y "sacar bola roja en la extracción número  $i$ ".

Como las extracciones son con reemplazamiento los sucesos son independientes y no dependen de la extracción

Sabemos que  $p(A) = \frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$ ,  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$  si los sucesos son independientes.

El extraer tres bolas es lo mismo

Me piden  $p(\text{las tres bolas del mismo color}) = p(\text{las tres azules } \text{ó} \text{ las tres rojas}) =$   
 $= p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + p(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) + p(R_1) \cdot p(R_2) \cdot p(R_3) =$

$$= (3/7) \cdot (3/7) \cdot (3/7) + (4/7) \cdot (4/7) \cdot (4/7) = 13/49.$$

b)

Calcule la probabilidad de que dos sean azules y una roja.

$$\begin{aligned} \text{Me piden } p(\text{dos sean azules y una roja}) &= p(A_1 \cap A_2 \cap R_3) + p(A_1 \cap R_2 \cap A_3) + p(R_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\ &= p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(R_3) + p(A_1) \cdot p(R_2) \cdot p(A_3) + p(R_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) = \\ &= (3/7) \cdot (3/7) \cdot (4/7) + (3/7) \cdot (4/7) \cdot (3/7) + (4/7) \cdot (3/7) \cdot (3/7) = 108/343. \end{aligned}$$

### EJERCICIO 3\_B

#### Parte II

El gasto anual, en videojuegos, de los jóvenes de una ciudad sigue una ley Normal de media desconocida  $\mu$  y desviación típica 18 euros. Elegida, al azar, una muestra de 144 jóvenes se ha obtenido un gasto medio de 120 euros.

a) (0'5 puntos) Indique la distribución de las medias de las muestras de tamaño 144.

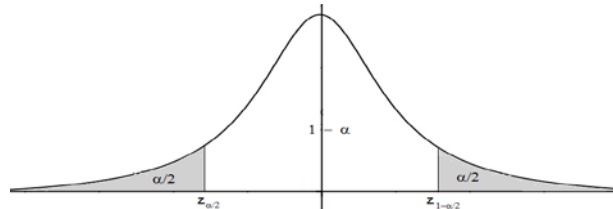
b) (0'75 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 99%, para el gasto medio en videojuegos de los jóvenes de esa ciudad.

c) (0'75 puntos) ¿Qué tamaño muestral mínimo deberíamos tomar para, con la misma confianza, obtener un error menor que 1'9?

#### Solución

Sabemos que para la media poblacional  $\mu$ , el *estimador* MEDIA MUESTRAL  $\bar{X}$ , sigue una  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , y

generalmente escribimos  $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  o  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (a, b)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  y  $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$  es el *punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$  que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para el intervalo de la media.

Pero la amplitud del intervalo es  $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$ , de donde  $E = (b - a)/2$ , por tanto el tamaño

mínimo de la muestra es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$ .

El gasto anual, en videojuegos, de los jóvenes de una ciudad sigue una ley Normal de media desconocida  $\mu$  y desviación típica 18 euros. Elegida, al azar, una muestra de 144 jóvenes se ha obtenido un gasto medio de 120 euros.

a)

Indique la distribución de las medias de las muestras de tamaño 144.

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que la distribución muestral de medias } \bar{X}, \text{ sigue una normal } N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) &= N\left(120, \frac{18}{\sqrt{144}}\right) = \\ &= N\left(120, \frac{18}{12}\right) = N\left(120, \frac{3}{2}\right) = N(120, 1'5) \end{aligned}$$

b)

Determine un intervalo de confianza, al 99%, para el gasto medio en videojuegos de los jóvenes de esa ciudad.

Datos del problema:  $\sigma = 18$ ,  $n = 144$ ,  $\bar{x} = 120$ ,  $\sigma/\sqrt{n} = 1'5$ , nivel de confianza = 9% = 0'99 =  $1 - \alpha$ , de donde  $\alpha = 0'01$ .

De  $1 - \alpha = 0'99$ , tenemos  $\alpha = 1 - 0'99 = 0'01$ , de donde  $\alpha/2 = 0'01/2 = 0'005$

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$ . Mirando en las tablas de la  $N(0,1)$  vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y una de las más próxima es 0'9949 que corresponde a  $z_{1-\alpha/2} = 2'57$ , por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = (120 - 2'57 \cdot 1'5, 120 + 2'57 \cdot 1'5) = \mathbf{(116'145, 123'855)}$$

c)

¿Qué tamaño muestral mínimo deberíamos tomar para, con la misma confianza, obtener un error menor que 1'9?

Datos del problema:  $\sigma = 18$ ,  $E < 1'9$ , con el nivel de confianza tenemos  $z_{1-\alpha/2} = 2'57$ .

De  $n > \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2'57 \cdot 18}{1'9} \right)^2 \cong 792'7943$ , es decir **el tamaño mínimo es  $n = 793$** .