OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.
b) (1 punto) Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.
c) (1 punto) Determine x para que $A.B = I_2$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a)
Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.

$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. De $B^2 = A$, tenemos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$, e igualando nos sale **$x = 1$**.

b)
Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.

Dada la matriz B si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de (B|I) a (I|C) la matriz C es la inversa de B, es decir $C = B^{-1}$. También podemos calcularla con la fórmula $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj(B^t)$.

$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I|B^{-1})$, luego $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Veámoslo por la fórmula:

$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1$; $B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, luego $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot Adj(B^t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dr $A - I_2 = B^{-1}$, tenemos $A = I_2 + B^{-1}$, es decir $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, igualando **$x = 0$**.

c)
Determine x para que $A.B = I_2$.

$A.B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Igualado tenemos **$x = -1$.**

EJERCICIO 2_A

a) (1'5 puntos) Halle los valores de *a* y *b* para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1, -3) y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.
b) (1'5 puntos) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

Solución

a)
Halle los valores de *a* y *b* para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto (1, -3) y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.

Como pasa por (1,-3) tenemos $f(1) = -3$.
Sabemos que los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada, luego $f''(-1) = 0$.
$f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$; $f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5$; $f''(x) = 6ax + 6$.
De $f''(-1) = 0 \rightarrow 6a(-1) + 6 = 0 \rightarrow 6 = 6a$, de donde **$a = 1$.**
De $f(1) = -3 \rightarrow 1 \cdot (1)^3 + 3(1)^2 - 5(1) + b = 3 \rightarrow -1 + b = 3$, de donde **$b = 4$.**

b)
Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

Estudiamos su 1ª derivada.
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$, $g'(x) = g(x) = 3x^2 - 6x$.
De $g'(x) = 0$, tenemos $3x^2 - 6x = 0 = x(3x - 6)$, de donde *$x = 0$ y $x = 2$. Que serán los posibles extremos relativos.*

De g'(-1) = $3(-1)^2 - 6(-1) = 3 > 0$, vemos que g'(x) > 0 en el intervalo (-∞,0), es decir g(x) es *estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (-∞,0)

De g'(1) = $3(1)^2 - 6(1) = -3 < 0$, vemos que g'(x) < 0 en el intervalo (0,+2), es decir g(x) es *estrictamente decreciente* $(\searrow)$ en el intervalo (0,+2)

De g'(3) = $3(3)^2 - 6(3) = 9 > 0$, vemos que g'(x) > 0 en el intervalo (2,+∞), es decir g(x) es *estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (2,+∞)

Por definición x = 0 es un máximo relativo, que vale g(0) = $(0)^3 - 3(0)^2 + 7 = 7$.
Por definición x = 2 es un mínimo relativo, que vale g(2) = $(2)^3 - 3(2)^2 + 7 = 3$.

EJERCICIO 3_A

Parte I

En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.
a) (1 punto) Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?
b) (1 punto) Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo?

Solución

En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo hay 7 nuevas.
a)
Tomada una silla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea nueva?

Llamemos R**,** N, R^C y N^C, a los sucesos siguientes, "silla con respaldo", "silla nueva", " silla sin respaldo", y " silla no nueva", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Silla con respaldo = R	Silla sin resplado = R^C	Totales
Silla nueva = N	7	3	
Silla no nueva = N^C			
Totales	30	10	40

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Silla con respaldo = R	Silla sin resplado = R^C	Totales
Silla nueva = N	7	3	**10**
Silla no nueva = N^C	**23**	**7**	**30**
Totales	30	10	40

(a)

p(silla nueva) = p(N) = $\frac{\text{Total sillas nuevas}}{\text{Total sillas}}$ = 10/40 = 1/4 **= 0'25**.

b)
Si se coge una silla que no es nueva, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga respaldo?

p(silla sin respaldo/silla no nueva) = $p(R^C/N^C) = \frac{\text{Total sillas sin respaldo no nuevas}}{\text{Total sillas no nuevas}}$ = 7/30 ≅ **0.2333**.

EJERCICIO 3_A

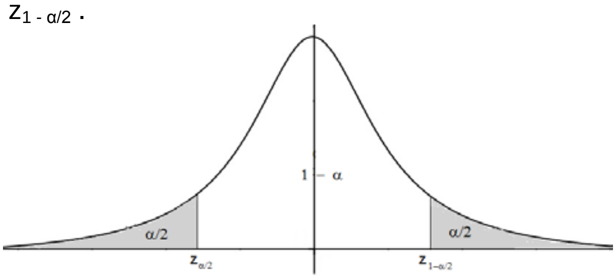
Parte II

(2 puntos) En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 9.
¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97 % y un error máximo admisible igual a 3?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Sabemos que $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo es $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2} . \sigma}{E} \right)^2$.

En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 9. ¿De qué tamaño, como mínimo, debe ser la muestra con la cual se estime la media poblacional con un nivel de confianza del 97 % y un error máximo admisible igual a 3?

Datos $\sigma = 9$; nivel de confianza = $1 - \alpha$ = 97% = 0'97; $E < 3$.

De $1 - \alpha$ = 0'97, tenemos α = 1- 0'97 = 0'03, de donde $\alpha/2$ = 0'03/2 = 0'015

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'985 vemos que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'985}$ = 2'17.

De $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2} . \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2'17.9}{3} \right)^2 \cong 42'38$, luego **el tamaño mínimo es n = 43**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (2 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$x \ge 0$; $y \ge 0$; $-x + 2y \le 6$; $x + y \le 6$; $x \le 4$.

b) (1 punto) Calcule el máximo de la función $F(x, y) = 2x + 2y + 1$ en la región anterior e indique dónde se alcanza.

Solución

(a) y (b)

Función Objetivo **F(x,y) = 2x + 2y + 1**.

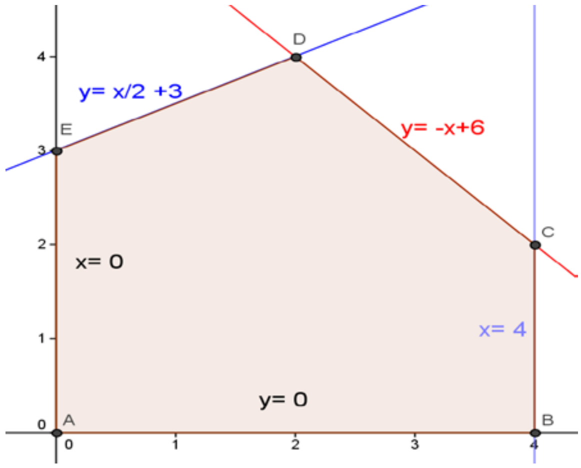
Restricciones:

Que son las desigualdades $x \ge 0$; $y \ge 0$; $-x + 2y \le 6$; $x + y \le 6$; $x \le 4$; y las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x = 0$; $y = 0$; $-x + 2y = 6$; $x + y = 6$; $x = 4$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$x = 0$; $y = 0$; $y = x/2 + 3$; $y = -x + 6$; $x = 4$;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0. El punto de corte es A(0,0)
De x = 4 e y = 0. El punto de corte es B(4,0)
De x = 4 e y = -x + 6; tenemos y = 2. El punto de corte es C(4,2)
De y = -x + 6 e y = x/2 + 3; tenemos -x + 6 = x/2 + 3, es decir -2x + 12 = x + 6, luego 6 = 3x, luego x = 2 e y = 4, y el punto de corte es D(2,4)
De x = 0 e y = x/2 + 3, tenemos y = 3, y el punto de corte es E(0,3)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(2,4) y E(0,3).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 2x + 2y + 1 en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(4,0), C(4,2), D(2,4) y E(0,3). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 2(0)+2(0)+1 = 1; F(4,0) = 2(4)+2(0)+1 = 9; **F(4,2)** = 2(4)+2(2)+1 = **13**;
F(2,4) = 2(2)+2(4)+1 = **13**; F(0,3) = 2(0)+2(3)+1 = 7.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 13** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en los vértices C(4,2) y D(2,4), es decir <u>en todo el segmento</u> que une el vértice C con el vértice D**.

EJERCICIO 2_B

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f.
b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x* = 1.

Solución

Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a)
Estudie su derivabilidad en *x* = 0.

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua.
Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 0

Como f es continua en x = 0, tenemos $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.

$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{2x-1} = 0/-1 = 0.$

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (x^2 + x) = 0$. Como ambas expresiones son iguales, f es continua en x = 0.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2x-1} & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, de donde:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(2x-1) - x(2)}{(2x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{-1}{(2x-1)^2} & \text{si } x \le 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que f es derivable en x = 0, si f'(0+) = f'(0-), es decir $\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).

$\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0-} \dfrac{-1}{(2x-1)} = -1/1 = -1$.

$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} (2x+1) = 1$. Como $-1 \neq 1$, $\lim_{x\to 0-} f'(x) \neq \lim_{x\to 0+} f(x)$, luego la función f no es derivable en x = 0.

b)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa *x* = 1.

Vemos que x = 1 está en la rama x > 0, luego tenemos $f(x) = x^2 + x$, y f'(x) = 2x + 1.

Sabemos que la recta tangente en x = 1 es "y – f(1) = f'(1)·(x – 1)
$f(x) = x^2 + x \rightarrow f(1) = (1)^2 + (1) = 2$.
$f(x) = 2x + 1 \rightarrow f'(1) = 2(1) + 1 = 3$.

La recta tangente pedida es " y – 2 = 3(x – 1) ", es decir y = 3x - 1.

EJERCICIO 1_B
Parte I
Sean los sucesos *A* y *B* independientes. La probabilidad de que ocurra el suceso *B* es 0'6. Sabemos también que p(A/B) = 0'3.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso *A* pero no el *B*.

Solución

Sean los sucesos *A* y *B* independientes. La probabilidad de que ocurra el suceso *B* es 0'6. Sabemos también que p(A/B) = 0'3.

Del problema tenemos: p(B) = 0'6; p(A/B) = 0'3.
Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$;
$p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$;
$p(A^C) = 1 - p(A)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$
a)
Calcule la probabilidad de que suceda al menos uno de los dos sucesos.

Me piden $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$
Como A y B son independientes $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$, es decir $p(A\cap B) = p(A)\cdot 0'6$;
De p(A/B) = 0'3, tenemos $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, es decir $0'3 = p(A\cap B)/0'6$, luego $p(A\cap B) = 0'3\cdot 0'6 = 0'18$.
Entrando en $p(A\cap B) = p(A)\cdot 0'6$, tenemos p(A) = 0'18/0'6 = 0'3.
Luego $p(A\cup B)$ $= p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'3 + 0'6 – 0'18$ **= 0'72.**
b)
Calcule la probabilidad de que ocurra el suceso *A* pero no el *B*.

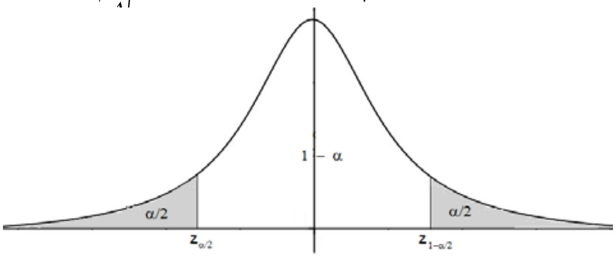
Me piden **p(A y noB)** $= p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B) = 0'3 – 0'18$ **= 0'12.**

EJERCICIO 1_B
Parte II

(2 puntos) Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 80 veces el valor cinco. Estime, mediante un intervalo de confianza al 95%, el valor de la probabilidad de obtener un cinco.

Solución

Sabemos que si $n \geq 30$ para la proporción muestral ***p,*** *el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción ***p*** *de las muestras es:*

$$I.C = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

(2 puntos) Se ha lanzado un dado 400 veces y se ha obtenido 80 veces el valor cinco. Estime, mediante un intervalo de confianza al 95%, el valor de la probabilidad de obtener un cinco.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 80/400 = 0'2, $\hat{q}$ = 1 – 0'2 = 0'8, n = 400, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05 y $\alpha/2$ = 0'025.

Con 1 – α = 0'95, tenemos α = 1- 0'95 = 0'05, de donde $\alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto **el intervalo de confianza** pedido **es**:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'2 - 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'2\cdot 0'8}{400}},\ 0'2 + 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'2\cdot 0'8}{400}}\right)$$

$\cong$ **(0'1608, 0'2392)**