OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (1'5 puntos) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $A^{-1}\cdot(B - A^t)$.

b) (1'5 puntos) Resuelva y clasifique el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución

a)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $A^{-1}\cdot(B - A^t)$.

Dada la matriz A, si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de (A|I) a (I|D), la matriz D es la inversa de A, es decir $D = A^{-1}$. También podemos calcularla con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} F_1 + 1\cdot F_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_2 \text{ por } F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} F_1:(-2) \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = (I|A^{-1}),$$

luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Veámoslo por la fórmula:

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, que como vemos sale lo mismo.

Calculamos ya $A^{-1}\cdot(B - A^t) = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$= (1/2)\cdot\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

b)

Resuelva y clasifique el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Efectuamos el producto $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de donde $\begin{pmatrix} x+3y \\ x+2y+z \\ y-z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro

$$\begin{array}{lclcl} x + 3y = 2 & \rightarrow & x + 3y = 2 & \rightarrow & x + 3y = 2 \\ x + 2y + z = 1 \;\; (F_2 - F_1) & \rightarrow & -y + z = -1 & \rightarrow & -y + z = -1 \\ y - z = 1 & \rightarrow & y - z = 1 \;\; (F_3 + F_2) & \rightarrow & 0 = 0. \end{array}$$

Como tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas tenemos un sistema compatible e indeterminado.
Tomando $y = \lambda \in R$, resulta $z = -1 + \lambda$ y $x = 2 - 3\lambda$, por tanto la **solución** del sistema **es** la terna **$(x,y,z) = (2 - 3\lambda, \lambda, -1 + \lambda)$ con $\lambda \in R$.**

EJERCICIO 2_A

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) (1 punto) Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) (1 punto) Determine la monotonía de *f* .
c) (1 punto) Represente gráficamente esta función.

Solución

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

a)
Estudie su continuidad y derivabilidad.

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua. También sabemos que tanto "x^2 - 1" como "x – 1" son funciones polinómicas por tanto son continuas y derivables en todo R, en particular en el intervalo donde están definidas, es decir "x^2 - 1" en x < 1 y "x – 1" en x > 1. Sólo nos falta ver la continuidad y derivabilidad de f en x = 1

Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 1

f es continua en x = 1, si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 - 1) = (1)^2 - 1 = 0$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x - 1) = 1 - 1 = 0$. Como ambas expresiones son iguales, **f es continua en x = 1, luego f es continua en R.**

Tenemos f(x) = $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$, de donde $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Sabemos que f es derivable en x = 1, si f'(1+) = f'(1-), es decir $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x) = 2(1) = 2$.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (1) = 1$. Como $2 \neq 1$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, luego la función **f no es derivable en x = 1, luego f es derivable en R – {1}.**

b)
Determine la monotonía de *f* .

Sabemos que la monotonía se reduce al estudio de la 1ª derivada.

Para x < 1, $f(x) = x^2 - 1$ y f'(x) = 2x.
De f'(x) = 0, tenemos 2x = 0, es decir x = 0 que puede ser un extremos relativo.

Como f'(-1) = 2(-1) = -2 < 0, tenemos f'(x) < 0 en el intervalo $(-\infty,0)$, es decir *f estrictamente decreciente* $(\searrow)$ en el intervalo $(-\infty,0)$.

Como f'(0'5) = 2(0'5) = 1 > 0, tenemos f'(x) > 0 en el intervalo (0,+1), es decir *f estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (0,+1).

Por definición x = 0 es un mínimo relativo, que vale $f(0) = (0)^2 - 1 = -1$.

Para x > 1, f(x) = x – 1 y f'(x) = 1.
De f'(x) = 0, tenemos 1 = 0, lo cual es absurdo por tanto la función no tiene extremos y es siempre estrictamente creciente o decreciente.

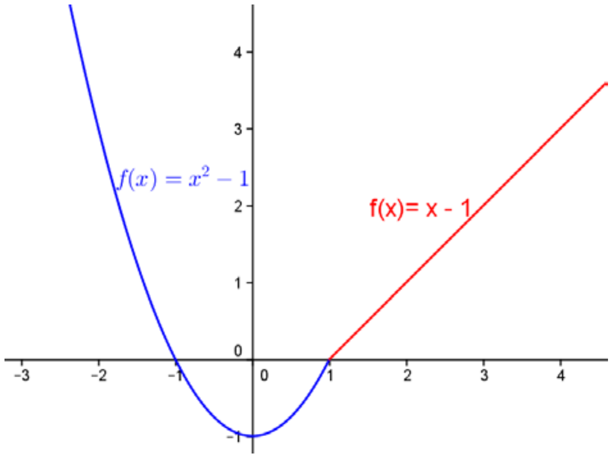
Como f'(2) = 1 > 0, tenemos f'(x) > 0 en el intervalo $(0,+\infty)$, es decir *f estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

c)
Represente gráficamente esta función.

Para x < 1, $f(x) = x^2 - 1$
Su gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba ($\cup$), porque el nº que multiplica a x^2 es positivo (+), luego es convexa (en Andalucía). Ya hemos visto en el apartado (b) que su vértice V es el mínimo V(0,-1).
Los puntos de corte son:
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,-1).
Para f(x) = 0, tenemos $x^2 - 1 = 0$, de donde $x^2 = 1$, es decir $x = \pm 1$. Puntos (1,0) y (-1,0).

Para x > 1, f(x) = x – 1. Su gráfica es una recta, en este caso una semirrecta. Con dos puntos es suficiente el $(1^+,0)$ y el (2,1).

Un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3_A

Parte I

Una enfermedad afecta a un 5% de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96% de resultados positivos, y aplicada a personas que no la padecen se obtiene un 2% de resultados positivos. Elegida una persona, al azar, y aplicada la prueba:

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado positivo?

b) (1 punto) Si se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona no padezca la enfermedad?

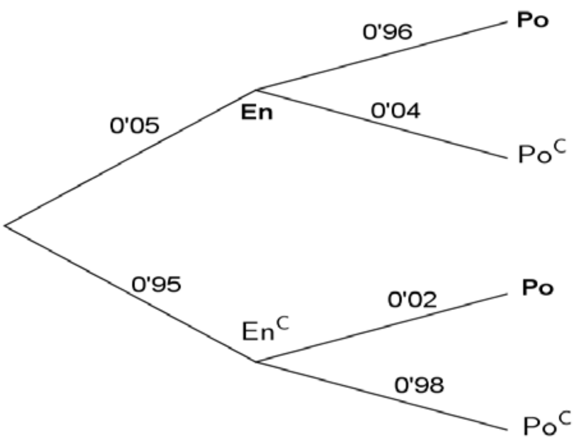
Solución

Una enfermedad afecta a un 5% de la población. Se aplica una prueba diagnóstica para detectar dicha enfermedad, obteniéndose el siguiente resultado: Aplicada a personas que padecen la enfermedad se obtiene un 96% de resultados positivos, y aplicada a personas que no la padecen se obtiene un 2% de resultados positivos. Elegida una persona, al azar, y aplicada la prueba:

Llamemos En, En^C, Po y Po^C, a los sucesos siguientes, “persona enferma”, “persona no enferma”, "da positivo con la prueba" y " no da positivo con la prueba ", respectivamente.

Además tenemos p(En) = 5% = 0’05, p(Po/En) = 96% = 0’96 y $p(Po/En^C)$ = 2% = 0’02.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un resultado positivo?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de dar positivo al aplicar la prueba es:

$$p(Po) = p(En).p(Po/En) + p(En^C).p(Po/ En^C) = (0'05)\cdot(0'96) + (0'95)\cdot(0'02) = 0'067.$$

b)
Si se obtiene un resultado positivo, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona no padezca la enfermedad?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(En^C/Po) = \frac{p\left(En^C \cap Po\right)}{p(Po)} = \frac{p\left(En^C\right).p(Po/En^C)}{p(Po)} = \frac{(0'95)\cdot(0'02)}{0'067} \cong 0'28358.$$

EJERCICIO 3_A

Parte II

a) (1'25 puntos) Sea la población {1, 5, 7}. Escriba todas las muestras de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.
b) (0'75 puntos) De una población de 300 hombres y 200 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 30 distribuida en los dos estratos, ¿cuál será la composición de la muestra?

Solución

a)
Sea la población {1, 5, 7}. Escriba todas las muestras de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.

Construyamos la distribución muestral de medias y, para ello, calculamos la media de todas las muestras posibles con reemplazamiento de tamaño 2 que son 9. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

	MUESTRAS								
Elementos	1 1	1 5	1 7	5 1	5 5	5 7	7 1	7 5	7 7
Media de la muestra $\overline{x}_i$	1	3	4	3	5	6	4	6	7

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i . x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
1	1	1	1
3	2	6	18
4	2	8	32
5	1	5	25
6	2	12	72
7	1	7	49
$\sum$	**N=9**	**39**	**197**

La media de la distribución muestral de medias (media de las medias muestrales) es:

$$\mu = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{39}{9} = 13/3$$

La varianza de la distribución muestral de medias es:

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{197}{9} - \left(\frac{13}{3}\right)^2 = \frac{28}{9} \cong \mathbf{3'1111.}$$

b)
De una población de 300 hombres y 200 mujeres se desea seleccionar, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, una muestra de tamaño 30 distribuida en los dos estratos, ¿cuál será la composición de la muestra?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es N_1, N_2, ..., N_k, y si n_1, n_2, ..., n_k son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números n_1, n_2, ..., n_k proporcionales a los tamaños de los estratos N_1, N_2, ..., N_k, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{300} = \frac{n_2}{200} = \frac{30}{300+200} = \frac{30}{500} = \frac{3}{50}$.

De $\frac{n_1}{300} = \frac{3}{50}$, tenemos $n_1 = \frac{900}{50} =$ **18 hombres** en el primer estrato.

De $\frac{n_2}{200} = \frac{3}{50}$, tenemos $n_2 = \frac{600}{50} =$ **12 mujeres** en el segundo estrato. También se podría haber calculado restan al total de la muestra 30 el número de hombres 18, y nos quedarían 12 mujeres.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Un laboratorio farmacéutico vende dos preparados, *A* y *B*, a razón de 40 y 20 euros el kg, respectivamente. Su producción máxima es de 1000 kg de cada preparado. Si su producción total no puede superar los 1700 kg, ¿cuál es la producción que maximiza sus ingresos? Calcule dichos ingresos máximos.

Solución

"x" = nº de preparados del tipo A.
"y" = nº de preparados del tipo B.
Función Objetivo **F(x,y) = 40x + 20y**. (Vende preparados, *A* y *B*, a razón de 40€ y 20€)

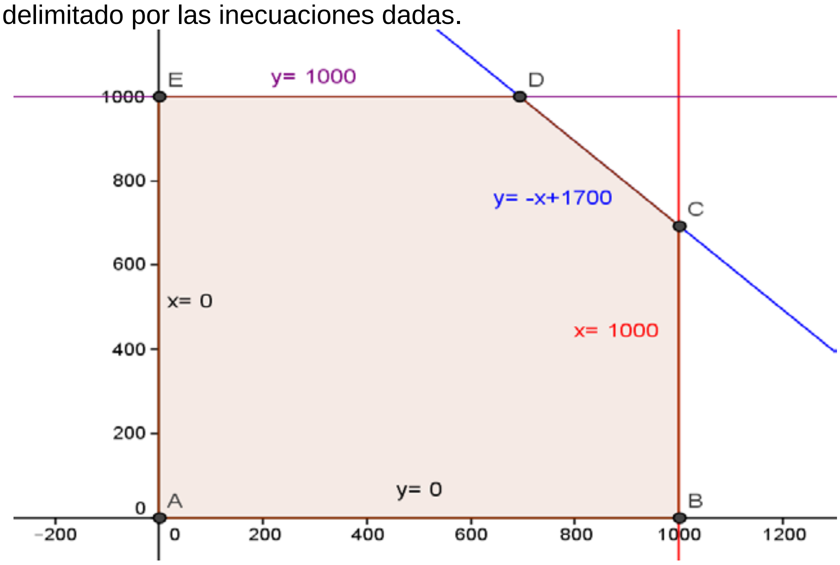
Restricciones:

Su producción máxima es de 1000 kg de cada preparado → $x \le 1000$.
Su producción máxima es de 1000 kg de cada preparado → $y \le 1000$.
Su producción total no puede superar los 1700 kg. → $x + y \le 1700$
Vende algún preparado, *A* o *B*. → $x \ge 0$ e $y \ge 0$

Las desigualdades $x \le 1000$; $y \le 1000$; $x + y \le 1000$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya **son rectas**, $x = 1000$, $y = 1000$, $x + y = 1700$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$x = 1000$, $y = 1000$, $y = -x + 1700$; $x = 0$; $y = 0$;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = 0$ e $y = 0$. El punto de corte es A(0,0)
De $y = 0$ y $x = 1000$. El punto de corte es B(1000,0)
De $x = 1000$ e $y = -x + 1700$; tenemos $y = 700$. El punto de corte es C(1000,700)
De $y = -x + 1700$ e $y = 1000$; tenemos $-x + 1700 = 1000$, es decir $x = 700$. Punto de corte es D(700,1000)
De $x = 0$ e $y = 1000$. Tenemos el punto de corte es E(0,1000)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0;0), B(1000,0), C(1000;700), D(700,1000) y E (0;1000).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 40x + 20y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0;0), B(1000,0), C(1000;700), D(700,1000) y E (0;1000). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 40·(0)+20(0) = 0; F(1000,0) = 40·(1000)+20(0) = 40000; **F(1000,700)** = 40·(1000)+20(700) = **= 54000**; F(700,1000) = 40·(700)+20(1000) = 48000; F(0,1000) =40·(0)+20(1000) = 20000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 54000 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice C(1000,700), es decir el número beneficio máximo es de 54000€ y se alcanza vendiendo 1000 preparados del tipo A y 700 preparados del tipo B.

EJERCICIO 2_B

a) (1'5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$ en el punto de abscisa *x* = 1.
b) (1'5 puntos) Se considera la función $f(x) = ax^2 – bx + 4$. Calcule los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f* tenga un extremo relativo en el punto (1,10).

Solución

a)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$ en el punto de abscisa *x* = 1.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También la ecuación de la recta tangente.
$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(k)' = 0$. La ecuación de la recta tangente (R.T.) a la gráfica de g en x = a es "y – g(a) = g'(a)·(x – a)".

En nuestro caso la recta tangente en x = 1 es "y – g(1) = g'(1)·(x – 1)".
$g(x) = \frac{3x - 2}{x + 1}$; $g'(x) = \frac{3(x + 1) - 1.(3x - 2)}{(x + 1)^2} = \frac{3}{(x + 1)^2}$. Luego g(0) = -2/1 = -2 y $g'(1) = 3/2^2 = 3/4$, y **la recta tangente pedida es y – (–2) = (3/4)·(x – 1), es decir y = 3x/4 – 11/4.**
b)
Se considera la función $f(x) = ax^2 – bx + 4$. Calcule los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f* tenga un extremo relativo en el punto (1,10).

Como pasa por (1,10) tenemos f(1) = 10.
Sabemos que los extremos relativos anulan la 1ª derivada, luego f'(1) = 0.
$f(x) = ax^2 – bx + 4$; f'(x) = 2ax – b.
De f'(1) = 0 → 2a(1) - b = 0 → **b = 2a.**
De f(1) = 10 → $a·(1)^2 – b(1) + 4 = 10$ → **a – b = 6.**
Entrando con b = 2a en a – b = 6, tenemos a – 2ª = 6, de donde **a = -6** y **b** = 2(-6) **= -12**.

EJERCICIO 3_B

Parte I
Una urna *A* contiene diez bolas numeradas del 1 al 10, y otra urna *B* contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8.
Se escoge una urna al azar y se saca una bola.
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 2?
b) (1 punto) Si el número de la bola extraída es impar, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B.

Solución

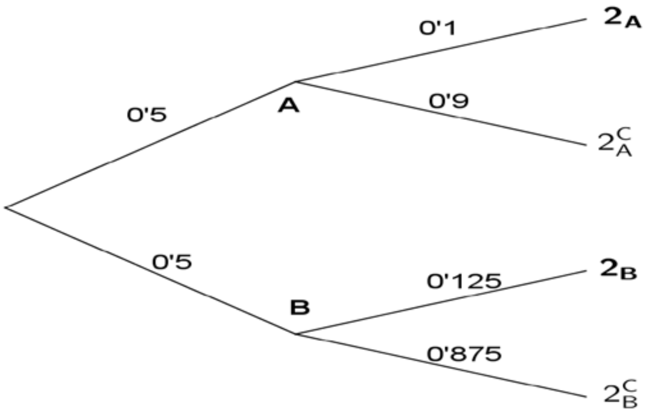
Una urna *A* contiene diez bolas numeradas del 1 al 10, y otra urna *B* contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8.
Se escoge una urna al azar y se saca una bola.

Lo vamos a realizar mediante dos diagramas de árbol y también utilizaremos la Regla de Laplace (nº de casos favorables entre nº de casos posibles).

Llamemos A, B, i_A , $i_A{}^C$, imp_A , $imp_A{}^C$, i_B , $i_B{}^C$, imp_B y $imp_B{}^C$ a los sucesos siguientes, "sacar bola de la urna A", "sacar bola de la urna B", "sacar el nº "i" de la urna A", "no sacar el nº "i" de la urna A", "sacar el nº "impar" de la urna A", "no sacar el nº "impar" de la urna A", "sacar el nº "i" de la urna B", "no sacar el nº "i" de la urna B", "sacar el nº "impar" de la urna B" y "no sacar el nº "impar" de la urna B", respectivamente.

Además tenemos p(A) = 1/2 = 0'5, p(B) = 1/2 = 0'5, p(2_A) = 1/10 = 0'1, p($2_A{}^C$) = 9/10 = 0'9, p(2_B)=1/8 = 0'125, p($2_B{}^C$) = 7/8 = 0'875, p(im_A) = 5/10 = 0'5, p($im_A{}^C$) = 5/10 = 0'5, p(im_B) = 4/8 = 0'5 y , p($im_B{}^C$) = 4/8 = 0'5.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



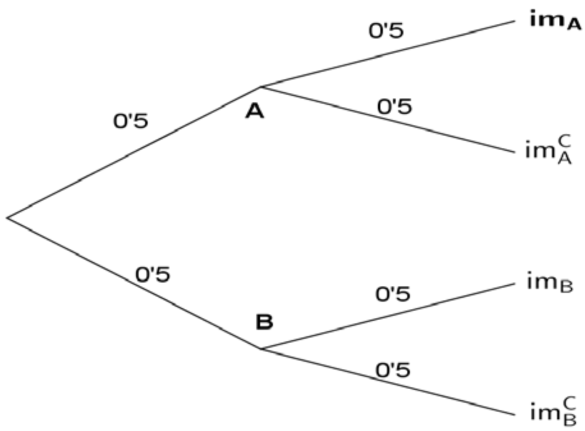
a)
¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 2?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída tenga el número 2 es:

p(Sacar un 2) = p(A).p(2_A/A) + p(B).p(2_B/B) = (0'5)·(0'1) + (0'5)·(0'125) **= 0'1125**.

b)
Si el número de la bola extraída es impar, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el teorema de Bayes y el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$\textbf{p(B/impar)} = \frac{p(B\cap impar)}{p(impar)} = \frac{p(B)\cdot p(im_B/B)}{p(A)\cdot p(im_A/A)+p(B)\cdot p(im_B/B)} = \frac{(0'5)\cdot(0'5)}{(0'5)\cdot(0'5)+(0'5)\cdot(0'5)} = \frac{1}{2} = \mathbf{0'5}.$$

EJERCICIO 3_B

Parte II

Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

51, 50, 53, 48, 49, 50, 51, 48, 50, 51, 50, 47, 51, 51, 49, 51.

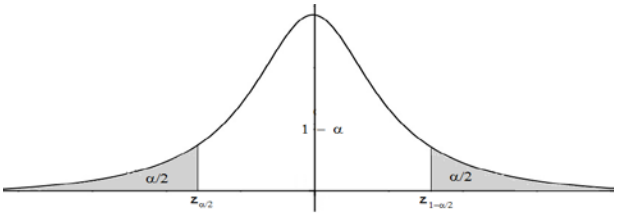
La talla de los bebés sigue una ley Normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida.

a) (0'75 puntos) ¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

b) (1'25 puntos) Determine un intervalo de confianza, al 97%, para la media poblacional.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.\ (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media.*

Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

Se han tomado las tallas de 16 bebés, elegidos al azar, de entre los nacidos en un cierto hospital, y se han obtenido los siguientes resultados, en centímetros:

51, 50, 53, 48, 49, 50, 51, 48, 50, 51, 50, 47, 51, 51, 49, 51.

La talla de los bebés sigue una ley Normal de desviación típica 2 centímetros y media desconocida.

a)

¿Cuál es la distribución de las medias de las muestras de tamaño 16?

Según hemos visto la distribución muestral de medias es $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) o N($\overline{x}$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

Datos del problema: σ =2, n =16, $\overline{x}$ = (51+50+53+48+49+50+51+48+50+51+50+47+51+51+49+51)/16 = 50.

Luego **la distribución muestral de medias pedida es la normal** N(50, $\frac{2}{\sqrt{16}}$) = N(50,2/4) = **N(50,0'5).**

b)

Determine un intervalo de confianza, al 97%, para la media poblacional.

Datos del problema: σ = 2, n =16, $\overline{x}$ = 50, nivel de confianza = 97% = 0'97 = 1 - α, de donde α = 0'03.

De 1 – α = 0'97, tenemos α = 1- 0'97 = 0'03, de donde α/2 = 0'03/2 = 0'015

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'985 viene, y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17, por tanto **el intervalo de confianza pedido es**:

$$I.C.\ (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$ = (50 – 2'17·0'5, 50 + 2'17·0'5) **= (48'915,51'085)**