OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$4x + 3y \geq 60, \quad y \leq 30, \quad x \leq (10 + y)/2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$$

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.
b) (0'5 puntos) Maximice en esa región factible la función objetivo F(x, y) = x + 3y .
c) (0'5 puntos) ¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

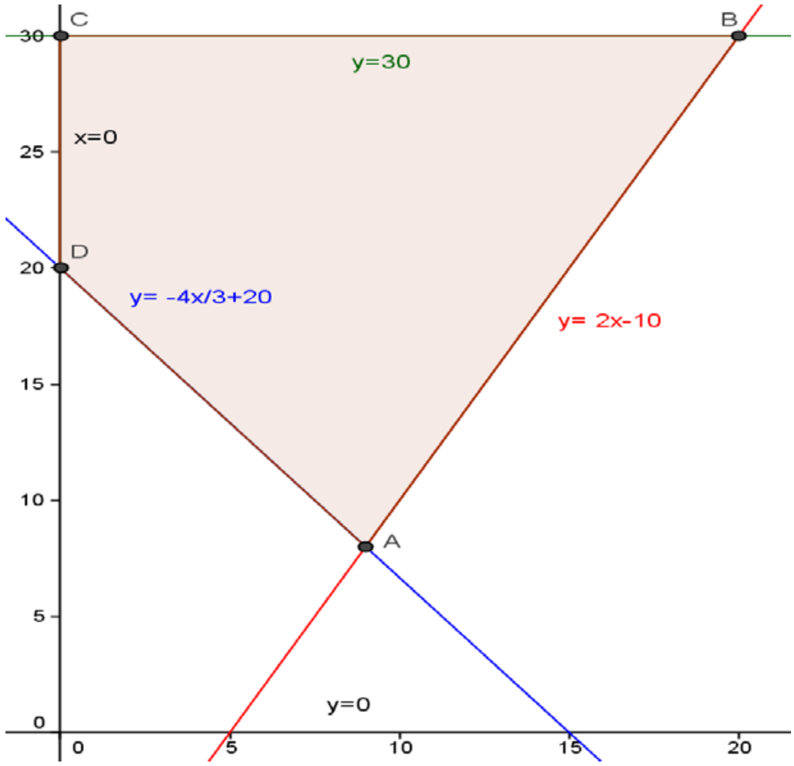
Solución

(a) y (b)
Tenemos las siguientes inecuaciones: $4x + 3y \geq 60$, $y \leq 30$, $x \leq (10 + y)/2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

De las desigualdades pasamos a las igualdades: $4x + 3y = 60$, $y = 30$, $x = (10 + y)/2$, $x = 0$, $y = 0$.
Para dibujar la región factible o recinto, de cada ecuación despejamos la incógnita "y", para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región y los vértices del recinto.

$$y = -4x/3 + 20, \quad y = 30, \quad 2x - 10 = y, \quad x = 0, \quad y = 0$$

Dibujamos las rectas y el recinto:



Calculamos los vértices A, B, C y D de dicha región:

De y= -4x/3+20 e y= 2x-10, tenemos -4x/3+20 = 2x-10, es decir -4x + 60 = 6x - 30, luego 90 = 10x, de donde x = 9 e y = 8, y el punto de corte es A(9,8).
De y= 2x-10 e y= 30, tenemos 2x-10 = 30, es decir 2x = 40, luego x = 20 e y= 30, y el punto de corte es B(20,30).
De x= 0 e y= 30, tenemos el punto de corte es C(0,30)
De x= 0 e y= -4x/3+20, tenemos y = 20, y el punto de corte es D(0,20)
El recinto tiene por vértices A(9,8), B(20,30), C(0,30) y D(0,20).

Consideremos la función F(x, y) = x + 3y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(9,8) = (9) + 3(8) = 33, F(20,30) = (20) + 3(30) = 110,
F(0,30) = (0) + 3(30) = 90, F(0,20) = (0) + 3(20) = 60.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 110** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el punto (20,30).**
c)
¿Pertenece el punto (11, 10) a la región factible?

Para que el punto (11,10) pertenezca a la región factible tiene que verificar todas las desigualdades
$4x + 3y \ge 60$, $y \le 30$, $x \le (10 + y)/2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

$4(11) + 3(10) \ge 60$ $\rightarrow$ $70 \ge 60$, lo cual es cierto.
$(10) \le 30$ $\rightarrow$ $10 \le 30$, lo cual es cierto.
$(11) \le (10 + (10))/2$ $\rightarrow$ **$11 \le 10$, lo cual es falso, por tanto el punto no pertenece al recinto.**

EJERCICIO 2_A

Sea la función f : R → R definida , por $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \le 1 \\ x^2 + mx + 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$.
a) **(**1 punto) Calcule *m* para que la función sea continua en *x* = 1.
b) (1 punto) Para ese valor de *m*, ¿es derivable la función en *x* = 1?
c) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x* = .0

Solución

Sea la función f : R → R definida , por $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \le 1 \\ x^2 + mx + 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$.
a)
Calcule *m* para que la función sea continua en *x* = 1.

Sabemos que f es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.
$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2^x) = 2^1 = 2$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 + mx + 5) = m + 6$. Igualando tenemos **m = - 4.**
b)
Para ese valor de *m*, ¿es derivable la función en *x* = 1?

Tenemos $f(x) = \begin{cases} 2^x & si \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & si \quad x > 1 \end{cases}$. $f'(x) = \begin{cases} 2^x \cdot \ln(2) & si \quad x < 1 \\ 2x - 4 & si \quad x > 1 \end{cases}$

Sabemos que f es derivable en x = 1 si f'(1+) = f'(1-), es decir si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es mas sencillo).
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (2^x \cdot \ln(2)) = 2\cdot\ln(2)$.
$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x - 4) = -2$. **Como 2·ln(2) ≠ - 2, la función f no es derivable en x = 1.**
c)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en *x* = 0.

Vemos que x = 0 está en la rama $x \le 1$, luego tenemos $f(x) = 2^x$.

Sabemos que la recta tangente en x = 0 es "y – f(0) = f'(0)·(x – 0)
$f(x) = 2^x$ $\rightarrow$ $f(0) = 2^0 = 1$.
$f(x) = 2^x \cdot \ln(2)$ $\rightarrow$ $f'(0) = 2^0 \cdot \ln(2) = \ln(2)$.

La recta tangente pedida es " y – 1 = ln(2)·x ", es decir y = ln(2)·x + 1.

EJERCICIO 3_A

Parte I
En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica

$p(A\cap B) = 0'1$, $p(A^C\cap B^C) = 0'6$, $p(A/B) = 0'5$

a) (0'75 puntos) Calcule p(B).
b) (0'75 puntos**)** Calcule $p(A\cup B)$.
c) **(**0'5 puntos) ¿Son *A* y *B* independientes?

Solución

En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica

$p(A\cap B) = 0'1,\ p(A^C\cap B^C) = 0'6,\ p(A/B) = 0'5$

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) + p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(A^C) = 1 - p(A)$;

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley Morgan} = $p(A\cup B)^C = 1 - p(A\cup B)$.

Dos sucesos

a)

Calcule p(B).

De $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, tenemos 0'5 = 0'1/p(B), luego **p(B)** = 0'1/0'5 **= 0'2**.

b)

Calcule $p(A\cup B)$.

De $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley Morgan} = $p(A\cup B)^C = 1 - p(A\cup B)$, tenemos $\mathbf{p(A\cup B)} = 1 - p(A^C\cap B^C) = 1 - 0'6$ **= 0'4**.

c)

¿Son *A* y *B* independientes?

Dos sucesos A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos $p(A\cup B) + p(A\cap B) - p(B) = p(A)$, es decir p(A) = 0'4 + 0'1 – 0'2 = = 0'3.

Como $0'1 \neq 0'3\cdot 0'2$, **los sucesos A y B no son independientes.**

EJERCICIO 3_A

Parte II

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4'8.

a) (1 punto) Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Trabajamos en una normal N(0,1), para lo cual tenemos que tipificar la variable en la distribución muestral de medias, es decir $Z = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley Normal de media 36 y desviación típica 4'8.

a)

Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

Datos del problema: Test $\to$ $N(\mu , \sigma) = N(36, 4'8)$; $\mu = 36$; $\sigma = 4'8$; $n = 16$; $\overline{X} \to N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}) =$

$= N(36 , \dfrac{4'8}{\sqrt{16}}) = N(36 , 4'8/4) = N(36, 1'2)$

Me están pidiendo la probabilidad $p(\overline{X} \geq 35)$ = {tipificamos} = $p(Z \geq \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}) = p(Z \geq \dfrac{35 - 36}{1'2}) = p(Z \geq -0'83) =$

= {Por simetría en la N(0,1)} = $p(Z \leq 0'83) = 0'7967$.

La probabilidad es aproximadamente 0'7967.

b)

¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

Me están pidiendo el porcentaje de la probabilidad "p($34 \le \overline{X} \le 36$)"

Como ahora n = 25 la distribución muestral de medias es N(μ , $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = N(36 , $\frac{4'8}{\sqrt{25}}$) = N(36 , 4'8/5) =

= N(36 , 0'96).

Luego = p($34 \le \overline{X} \le 36$) = {tipificamos} = p($\frac{34 - 36}{0'96} \le Z \le \frac{36 - 36}{0'96}$) = p(- 2'08 ≤ Z ≤ 0) =

= p(Z ≤ 0) - p(Z ≤ - 2'08) = p(Z ≤ 0) – [1 - p(Z ≤ 2'08)] = p(Z ≤ 0) + p(Z ≤ 2'08) – 1 = {Mirando en la tabla} =
= 0'5 + 0'9812 – 1 = 0'4812. En tanto por ciento es 48'12%.

El tanto por ciento pedido es 48'12%.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (1'5 puntos) Halle la matriz *A* que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$.

b) (1'5 puntos) Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:

x − 3y + 2z = 0; −2x + y − z = 0; x − 8y + 5z = 0.

Solución

a)

Halle la matriz *A* que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$.

Fijándonos en el producto de matrices vemos que la matriz A es de orden 2x1, es decir A = $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

De $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$, tenemos $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$ es decir $\begin{pmatrix} 2x+3y \\ -x+5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$. Igualando

2x+3y = 9 F_1+2F_2 → 13y = 65 → y = 65/13 = 5
-x+5y = 28   -x+5y = 28 → -x+5(5) = 28 → 325/13 – 28 = x = - 3.

La matriz pedida es A=$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

El problema también se puede resolver multiplicando la expresión $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$, por la izquierda por la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, el resultado es el mismo.

b)

Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:

x − 3y + 2z = 0; −2x + y − z = 0; x − 8y + 5z = 0.

Observamos que es un sistema homogéneo, por tanto siempre tiene la solución trivial (x,y,z) = (0,0,0).
Lo resolvemos por el método de reducción de Gauss.

x − 3y + 2z = 0 → x − 3y + 2z = 0 → x − 3y + 2z = 0
−2x + y − z = 0 F_2+2F_1 → − 5y + 3z = 0 → − 5y + 3z = 0
x − 8y + 5z = 0 F_3-F_1 → − 5y + 3z = 0 F_3-F_1 → 0 = 0.

Observamos que tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, por tanto tenemos un **sistema compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones en R**.

Para resolverlo tomamos y = $\lambda \in$ R, de donde -5λ + 3z = 0, es decir z = 5λ/3. Entrando en la 1ª ecuación x – 3(λ) + 2(5λ/3) = 0, tenemos x = 3λ – 10λ/3 = – λ/3.

La solución del sistema es (x,y,z) = (– λ/3, λ, 5λ/3) con λ ∈ R.

EJERCICIO 2_B

a) (2 puntos) Sea la función definida para todo número real x por f(x) = $ax^3 + bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es − 3.

b) (1 punto) Si en la función anterior a = 1/3 y b = - 4 determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

Solución

a)

Sea la función definida para todo número real x por $f(x) = ax^3 + bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,1) y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es − 3.
b)
Si en la función anterior a = 1/3 y b = - 4 determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

Su monotonía y sus extremos relativos de $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$.
Recordamos que la monotonía sale del estudio de la primera derivada.
Los puntos donde se anula f'(x) pueden ser los extremos relativos.
Si f'(x) > 0, f(x) es estrictamente creciente (Se dibuja hacia arriba).
Si f'(x) < 0, f(x) es estrictamente decreciente (Se dibuja hacia abajo).

Como $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, tenemos $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240$ y $f''(x) = 48x - 168$.

De f'(x) = 0, tenemos $24x^2 - 168x + 240 = 0$, de donde $x^2 - 7x + 10 = 0$, de donde $x = \frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} = \frac{7\pm 3}{2}$, y las soluciones son x = (7+3)/2 = 5 y x = (7-3)/2 = 2, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(0) = 24(0)^2 - 168(0) + 240 = 240 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente en $(-\infty,2)$**.
Como $f'(3) = 24(3)^2 - 168(3) + 240 = -48 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente en (2,5)**.
Como $f'(6) = 24(6)^2 - 168(6) + 240 = 96 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente en $(5,+\infty)$**.

Por definición **x = 2 es un máximo relativo y vale** $f(2) = 8(2)^3 – 84(2)^2 + 240(2) =$ **208**
Por definición **x = 5 es un mínimo relativo y vale** $f(5) = 8(5)^3 – 84(5)^2 + 240(5) =$ **100**

EJERCICIO 3_B

Parte I

Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

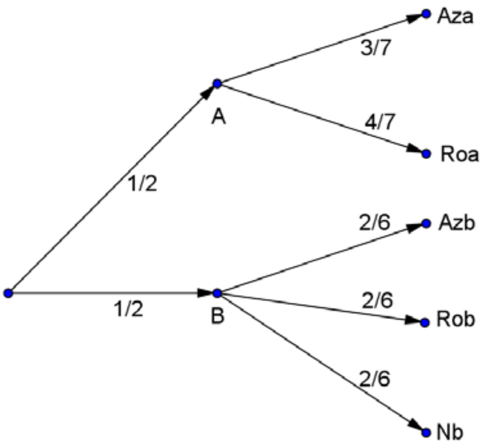
Solución

Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.

Llamemos A**,** B, Aza, Azb, Roa, Rob y Nb, a los sucesos siguientes, "sacar una bola de la urna A", "sacar una bola de la urna B", " sacar una bola azul de la urna A", " sacar una bola azul de la urna B", " sacar una bola roja de la urna A", "sacar una bola roja de la urna B" y " sacar una bola negra de la urna B".

Tenemos p(A) = p(B) = 1/2; p(Aza) = 3/7; p(Roa) = 4/7; p(Azb) = 2/6; p(Rob) = 2/6 y p(Nb) = 2/6;

Resumimos todo esto en un diagrama de árbol con sus probabilidades (Recordamos que la suma de las probabilidades que parten de un mismo punto suma 1):



a)
Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

Viendo el diagrama de árbol, tenemos por el Teorema de la probabilidad total:

p(Roja) = p(A).p(Roa/A) + p(B).p(Rob/B) = (1/2)·(4/7) + (1/2)·(2/6) = 19/42 ≅ **0'4524.**

b)
Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Me piden p(B/Azul) = $\frac{p(B \cap Azul)}{p(Azul)} = \frac{p(B) \cdot p(Azb/B)}{p(Azul)} = \frac{(1/2)\cdot(2/6)}{(8/21)}$ **= 7/16 = 0'4375.**

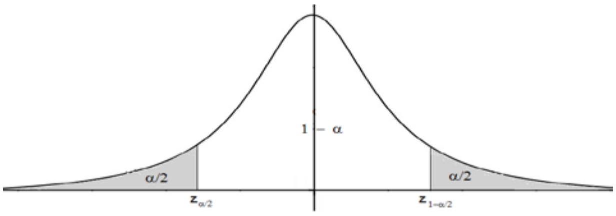
Por el Teorema de la probabilidad total:
p(Azul) = p(A).p(Aza/A) + p(B).p(Azb/B) = (1/2)·(3/7) + (1/2)·(2/6) = 8/21.

EJERCICIO 3_B

Parte II
Se sabe que (45'13, 51'03) es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.
a) (0'5 puntos) ¿Cuál es el error cometido?
b) (1'5 puntos) Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1'8.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media.*

Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$*.*

Se sabe que (45'13, 51'03) es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 15.
a)
¿Cuál es el error cometido?

Datos del problema: I.C.(μ) = (45'13, 51'03); b – a = 51'03 – 45'13 = 5'9; σ = 15; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05 y α/2 = 0'025

Sabemos que **el error es: E <** (b – a)/2 = 5'9/2 = **2'95**.

b)
Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1'8.

Datos del problema: I.C.(μ) = (45'13, 51'03); error E < 1'8; σ = 15; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05 y α/2 = 0'025.

Con 1 – α = 0'95, tenemos α = 1- 0'95 = 0'05, de donde α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto tamaño mínimo de la muestra es:

$$n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96{\cdot}15}{1'8}\right)^2 \cong 266'777$$, es decir **el tamaño mínimo es n = 267**.