OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (1 punto) Sea la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Calcule el valor de *b* para que $B^2 = I_2$.

b) (2 puntos) Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones 2

$$\begin{aligned} x + y &= 1 + z \\ 2x + z &= 2 + y \\ y &= z \end{aligned}$$

Solución

a)

Sea la matriz B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Calcule el valor de *b* para que $B^2 = I_2$.

$B^2 = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b+1 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Igualando tenemos:

1 = 1

0 = 0

b + 1 = 0, de donde b = -1.

$b^2 = 1$, de donde b = ± 1. La **única solución común a las cuatro ecuaciones es b = -1**.

b)

Resuelva y clasifique el sistema de ecuaciones:

x + y = 1 + z (sustituimos y = z) $\rightarrow$ x + z = 1 + z, de donde x = 1.

2x + z = 2 + y (sustituimos y = z) $\rightarrow$ 2x + z = 2 + z, de donde x = 1.

y = z

Tomando y = z = $\lambda \in$ R, **la solución del sistema es (x,y,z) = (1, λ, λ) con λ nº real**, **y vemos que es un sistema compatible e indeterminado, es decir tiene infinitas soluciones reales.**

EJERCICIO 2 A

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{x + 1} & si \quad x \le 0 \\ x^2 + 2x - 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Estudie su derivabilidad en *x* = 0.

b) (1'5 puntos) Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.

Solución

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{x + 1} & si \quad x \le 0 \\ x^2 + 2x - 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$

a)

Estudie su derivabilidad en *x* = 0.

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua.

Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 0

Como f es continua en x = 0, tenemos $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$.

$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \dfrac{2x - 3}{x + 1} = -3$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 2x - 3) = -3$. Por tanto f es continua en x = 0.

Tenemos $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - 3}{x + 1} & si \quad x \le 0 \\ x^2 + 2x - 3 & si \quad x > 0 \end{cases}$, de donde:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x + 1) - (2x - 3) \cdot 1}{(x + 1)^2} & si \quad x < 0 \\ 2x + 2 & si \quad x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{5}{(x + 1)^2} & si \quad x < 0 \\ 2x + 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Sabemos que f es derivable en x = 0, si f'(0+) = f'(0-), es decir $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{5}{(x+1)^2} = 5.$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x + 2) = 2$. Como $5 \neq 2$, **la función no es derivable en x = 0**.

b)
Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.

Sabemos que las funciones polinómicas no tienen asíntotas, y que los cocientes de funciones polinómicas tienen una asíntota horizontal (A.H.) si coincide el grado del numerador con el del denominador, que es nuestro caso, y además dicha A.H. es la misma en $\pm\infty$.
También sabemos que los números que anulan el denominador son asíntotas verticales (A.V.) si el límite en dicho número es ∞.

Vemos que existen asíntotas en la rama $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, que está definida en $x \leq 0$.

El número que anula el denominador (x+1=0) es x = -1, y como $\lim_{x\to -1^-} \frac{2x-3}{x+1} = -5/0^+ = -\infty$, **la recta x = -1 es una A.V. de f.**

Como $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2(-x)-3}{(-x)+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x}{-x} = \lim_{x\to +\infty} (-2/-1) = 2$, **la recta y = 2 es una A.H. en $-\infty$.**

EJERCICIO 3 A

Parte I

(2 puntos) En un espacio muestral se consideran dos sucesos A y B tales que $p(A\cup B) = 1$, $p(A\cap B) = 1/6$ y $p(A/B) = 1/3$. Halle la probabilidad del suceso *A* y la del suceso *B*.

Solución

En un espacio muestral se consideran dos sucesos A y B tales que $p(A\cup B)=1$, $p(A\cap B)=1/6$ y $p(A/B)=1/3$. Halle la probabilidad del suceso *A* y la del suceso *B*.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(A^C) = 1 - p(A)$;

Tenemos: $p(A\cup B) = 1$, $p(A\cap B) = 1/6$ y $p(A/B) = 1/3$

De $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$, tenemos (1/3) = (1/6)/p(B), luego **p(B)** = (1/6)/(1/3) **= 1/2**.

De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos $p(A\cup B) – p(B) + p(A\cap B) = p(A)$, luego **p(A)** = 1-1/2+1/6 **= 2/3**.

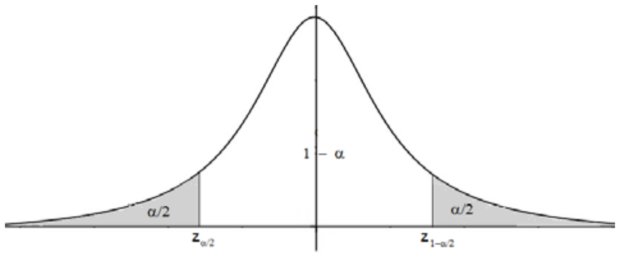
EJERCICIO 3 A

Parte II

En una Universidad se toma, al azar, una muestra de 400 alumnos y se observa que 160 de ellos han aprobado todas las asignaturas.
a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para estimar el porcentaje de alumnos de esa Universidad que aprueban todas las asignaturas.
b) (1 punto) A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error no sea superior a 0'04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos alumnos, como mínimo, ha de tener la muestra?

Solución

*Sabemos que si $n \geq 30$ para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción ***p*** *de las muestras es:*

$$I.C=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En una Universidad se toma, al azar, una muestra de 400 alumnos y se observa que 160 de ellos han aprobado todas las asignaturas.

a)

Halle un intervalo de confianza, al 97%, para estimar el porcentaje de alumnos de esa Universidad que aprueban todas las asignaturas.

Datos del problema: $\hat{p} = \frac{160}{400} = \frac{2}{5}$, $\hat{q} = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, n = 400, *nivel de confianza 1 – α* = 97% = 0’97, de donde α = 0’03 = 7% como *nivel de significación*.

De α = 0’03 tenemos α/2 = 0’015

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’985 viene en la tabla y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17. Por tanto **el intervalo de confianza** pedido **es**:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{2}{5} - 2'17.\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}{400}}, \frac{2}{5} + 2'17.\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}{400}}\right) \cong \mathbf{(0'34684; 0'45318)}$$

b)

A la vista del resultado anterior se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error no sea superior a 0’04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos alumnos, como mínimo, ha de tener la muestra?

Datos del problema: $\hat{p} = \frac{2}{5}$; $\hat{q} = \frac{3}{5}$; $z_{1-\alpha/2}$ = 2’17; E < 0’04

De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2\cdot(2/5)\cdot(3/5)}{(0'04)^2}$ = 706’335, tenemos **n = 707**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 B

(3 puntos) Una empresa fabrica lunas para coches. Cada luna delantera requiere 2’5 m^2 de cristal, mientras que cada luna trasera requiere 2 m^2.

La producción de una luna delantera precisa 0’3 horas de máquina de corte y cada luna trasera 0’2 horas.

La empresa dispone de 1750 m^2 de cristal por semana y 260 horas semanales de máquina de corte.

Para adaptarse a la demanda habitual, la empresa fabrica siempre, como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras.

Determine cuántas lunas de cada tipo debe fabricar semanalmente la empresa para que el número total de lunas sea máximo.

Solución

“x” = Luna delantera

“y” = Luna trasera

Función Objetivo **F(x,y) = x + y**. (número total de lunas sea máximo)

Restricciones:

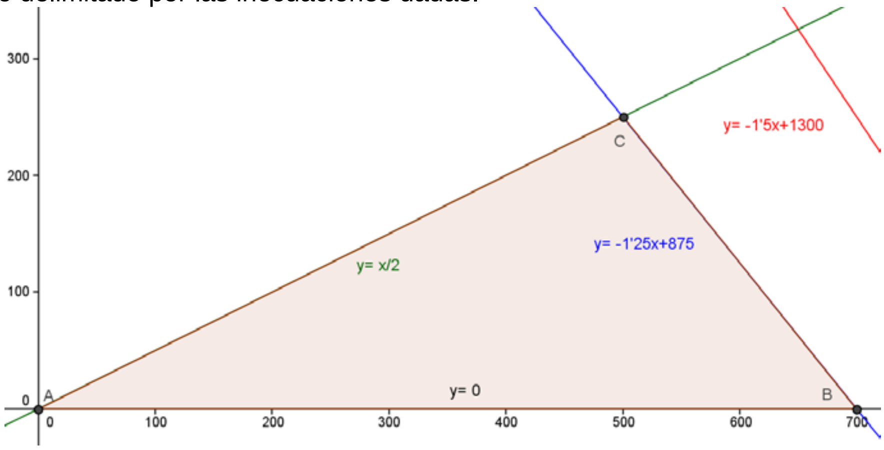
Luna delantera 2’5 m^2, luna trasera 2 m^2, se dispone de 1750 m^2 → $2,5x + 2y \le 1750$

Luna delantera 0'3 horas, luna trasera 0'2 horas, se dispone de 260 horas $\rightarrow$ $0'3x + 0'2y \le 260$
Se fabrica como mínimo, el doble de lunas delanteras que de lunas traseras. $\rightarrow$ $x \ge 2y$
Se fabricarán cero o mas lunas traseras. $\rightarrow$ $y \ge 0$

Las desigualdades $2,5x + 2y \le 1750$; $0'3x + 0'2y \le 260$; $x \ge 2y$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $2,5x + 2y = 1750$; $0'3x + 0'2y = 260$; $x = 2y$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = -1'25x + 875$; $y = -1'5x + 1300$; $y = x/2$; $y = 0$;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = x/2$ e $y = 0$; tenemos el punto de corte es A(0,0)

De $y = x/2$ e $y = -1'25x + 875$; tenemos $x/2 = -1'25x + 875$, luego $x = -2'5x + 1750$, de donde $3'5x=1750$, por tanto $x = 500$ e $y = 250$. El punto de corte es B(500,250)

De $y = -1'25x + 875$ e $y = 0$; tenemos $-1'25x + 875 = 0$, de donde "$875 = 1'25x$", es decir sale "$x = 700$" e "$y = 0$", y el punto de corte es C(700,0)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0, 0), B(500, 250) y C(700, 0).

Calculemos el máximo de la función $F(x,y) = x + 0'35y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(500,250) y C(700,0).

F(0,0) = (0) + (0) = 0; **F(500,250)** = (500) + (250) **= 750;** F(700,0) = (700) + (0) = **700.**

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 750** (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice B(500,250), es decir el número máximo de lunas es de 750 y se obtiene fabricando 500 delanteras y 250 traseras.

EJERCICIO 2 B

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.
a) (2 puntos) Determine los extremos relativos de f ; estudie la monotonía y la curvatura.
b) (1 punto) Represente gráficamente la función f .

Solución

Se considera la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.
a)
Determine los extremos relativos de f ; estudie la monotonía y la curvatura.

Recordamos que la monotonía sale del estudio de la primera derivada.
Los puntos donde se anula $f'(x)$ pueden ser los extremos relativos.

Si f'(x) > 0, f(x) es estrictamente creciente (Se dibuja hacia arriba).
Si f'(x) < 0, f(x) es estrictamente decreciente (Se dibuja hacia abajo).

Como $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$, tenemos $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ y $f''(x) = 6x - 18$.

De f'(x) = 0, tenemos $3x^2 - 18x + 24 = 0$, de donde $x^2 - 6x + 8 = 0$, de donde $x = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm 2}{2}$, y las soluciones son x = (6+2)/2 = 4 y x = (6-2)/2 = 2, que serán los posibles extremos relativos.

Como $f'(0) = 3(0)^2 - 18(0) + 24 = 24 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente (↗) en (-∞,2)**.
Como $f'(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 24 = -3 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente (↘) en (2,4)**.
Como $f'(5) = 3(5)^2 - 18(5) + 24 = 9 > 0$, **f(x) es estrictamente creciente (↗) en (4,+∞)**.

Por definición **x = 2 es un máximo relativo y vale** $f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) =$ **20**
Por definición **x = 4 es un mínimo relativo y vale** $f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) =$ **16**

Su curvatura y su punto de inflexión.

Recordamos que la curvatura sale del estudio de la segunda derivada.
Los puntos donde se anula f''(x) pueden ser los puntos de inflexión.
Si f''(x) > 0, f(x) es convexa (∪) (en Andalucía).
Si f''(x) < 0, f(x) es cóncava (∩) (en Andalucía).

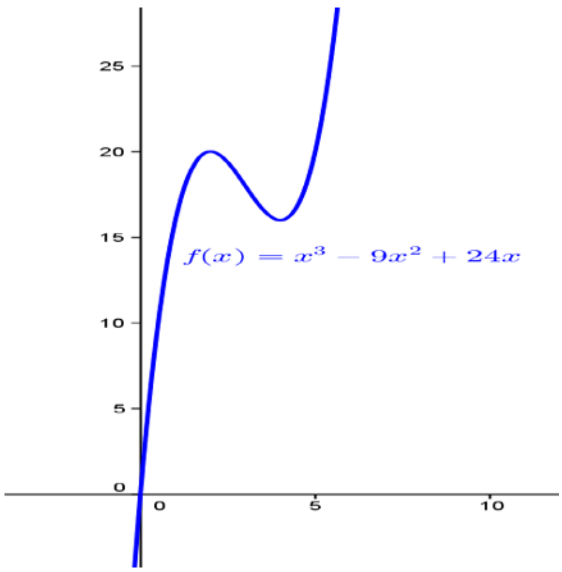
De f''(x) = 0, tenemos 6x - 18 = 0, de donde x = 3, que será el posible punto de inflexión.

Como f''(0) = 6(0) - 18 = - 18 < 0, **f(x) es cóncava (∩) en (-∞,3)**.
Como f''(4) = 6(4) - 18 = 6 > 0, **f(x) es convexa (∪) en (3,+∞)**.
Por definición **x = 3 es un punto de inflexión de f que vale** $f(3) = (3)^3 - 9(3)^2 + 24(3) =$ **18**.
b)
Represente gráficamente la función *f* .

Con los datos del apartado (a) ya podríamos hacer un esbozo de la gráfica. No obstante veremos el comportamiento en ± ∞ y los cortes con los ejes.

$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x) = \lim_{x\to+\infty} (x^3) = +\infty$
Para x = 0, f(0) = 0.
Para f(x) = 0, $x^3 - 9x^2 + 24x = 0 = x(x^2 - 9x + 24)$, de donde x = 0 y $x^2 - 9x + 24 = 0$, que no tiene raíces reales, luego el único punto de corte es (0,0).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es :



EJERCICIO 3 B

Parte I

Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
a) (0'5 puntos) Obtener dos unos.
b) (0'5 puntos) Obtener al menos un dos.
c) (0'5 puntos) Obtener dos números distintos.
d) (0'5 puntos) Obtener una suma igual a cuatro.

Solución

Sabemos que el lanzar dos veces a la vez se puede considerar como lanzar un sólo dado dos veces, por tanto los sucesos son independientes es decir $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$, $p(A) = \dfrac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$, también sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(A^C) = 1 - p(A)$, etc.. Tambien sabemos que el número de casos posibles al lanzar dos dados es 6x6 = 36.

Un experimento aleatorio consiste en lanzar simultáneamente dos dados con las caras numeradas del 1 al 6. Calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:
a)
Obtener dos unos.

Llamamos i_1 y i_2, el sacar nº "i" en la 1ª tirada y sacar nº "i" en la 2ª tirada, respectivamente.

P(dos unos) = $p(1_1 \text{ y } 1_2) = p(1_1\cap 1_2) = p(1_1)\cdot p(1_2) = (1/6)\cdot(1/6) = 1/36$
b)
Obtener al menos un dos.

P(al menos un dos) = $p(2_1 \text{ ó } 2_2) = p(2_1\cup 2_2) = p(2_1) + p(2_2) - p(2_1\cap 2_2) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$.
c)
Obtener dos números distintos.

Obtener dos números distintos, es lo contrario de obtener dos números iguales.
Casos favorables = $\{1_1 - 1_2;\ 2_1 - 2_2;\ 3_1 - 3_2;\ 4_1 - 4_2;\ 5_1 - 5_2;\ 6_1 - 6_2;\ \}$. Vemos que son 6 de los 36 posibles.

p(dos números distintos) = 1 – p(dos números iguales) = 1 – 6/36 = 5/6
d)
Obtener una suma igual a cuatro.
Casos favorables = $\{1_1 - 3_2;\ 3_1 - 1_2;\ 2_1 - 2_2;\ 2_1 - 2_2\}$. Vemos que son 4 de los 36 posibles.

P(suma igual a cuatro) = 4/36 = 1/9.

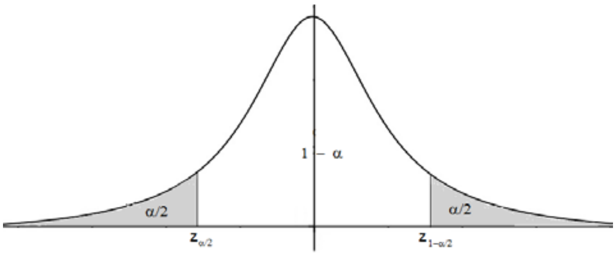
EJERCICIO 3 B

Parte II

(2 puntos) Para realizar una encuesta en un Instituto se selecciona, aleatoriamente, una muestra de 50 alumnos y se les pregunta si tienen reproductores de mp3, contestando afirmativamente 20 de ellos. Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de alumnos que poseen reproductores de mp3 en la población total de alumnos del Instituto.

Solución

*Sabemos que si $n \geq 30$ para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o **p** $\rightarrow N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Para realizar una encuesta en un Instituto se selecciona, aleatoriamente, una muestra de 50 alumnos y se les pregunta si tienen reproductores de mp3, contestando afirmativamente 20 de ellos. Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de alumnos que poseen reproductores de mp3 en la población total de alumnos del Instituto.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 20/50 = 2/5, $\hat{q} = 1-\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, n = 50, *nivel de confianza 1 – α* = 96% = 0’96, de donde α = 0’04 = 4% como *nivel de significación*.
De α = 0’04 tenemos α/2 = 0’02

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’98 no viene en la tabla, y que el más próximo es 0’9798 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2’05. Por tanto **el intervalo de confianza** pedido **es**:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{2}{5} - 2'05.\sqrt{\frac{\frac{2}{5}.\frac{3}{5}}{50}}, \frac{2}{5} + 2'05.\sqrt{\frac{\frac{2}{5}.\frac{3}{5}}{50}}\right) \cong \mathbf{(0'25797; 0'54203)}$$