OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (1 punto) Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles. Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.

b) (2 puntos) Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + B^t = B$, donde *X* es una matriz cuadrada de orden 2.

Solución

a)

Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles. Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones adecuado que permite calcular cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.

"x" = nº de sillas
"y" = nº de sillones
"z" = nº de butacas

De "ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas", tenemos: $x + y + z = 15$.
De "cobra 50€ por silla, 150€ por sillón y 200€ por butaca y ha ganado 1600€", tenemos:
$50x + 150y + 200z = 1600$.
De "el nº de butacas es la cuarta parte del nº que suman los demás muebles", tenemos: $z = (x + y)/2$.

El sistema de ecuaciones pedido es:

$$\mathbf{x + y + z = 15}$$
$$\mathbf{50x + 150y + 200z = 1600}$$
$$\mathbf{z = (x + y)/2.}$$

Si se resolviese saldría (no lo piden): x = 9, y = 1 y z = 5.

b)

Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial $AX + B^t = B$, donde *X* es una matriz cuadrada de orden 2.

Dada la matriz A si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de la matriz (A|I) a la matriz (I|D), la matriz D es la inversa de A, es decir $D = A^{-1}$. También podemos calcular la matriz inversa con la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2 - 2\cdot F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2:(8) \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2/8 & 3/8 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 + 2\cdot F_1 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/8 & -2/8 \\ 0 & 1 & -2/8 & 3/8 \end{array}\right) = (I|A^{-1})$$

luego la matriz inversa pedida es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/8 & -2/8 \\ -2/8 & 3/8 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Veámoslo por la fórmula:

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8$; $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Como vemos nos da lo mismo.

Como existe A^{-1} multiplicando la expresión $AX + B^t = B$, por la izquierda por A^{-1} tenemos:
$A^{-1}\cdot AX + A^{-1}\cdot B^t = A^{-1}\cdot B$, de donde $IX + A^{-1}\cdot B^t = A^{-1}\cdot B$, es decir $X = A^{-1}\cdot B - A^{-1}\cdot B^t$.

$X = A^{-1}\cdot B - A^{-1}\cdot B^t = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 14 & 18 \\ -13 & -7 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -14 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix} 16 & 32 \\ -24 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2 A

Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \le 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* .
b) (1 punto) Represente la gráfica de *f* .
c) (0'5 puntos) Indique los extremos relativos de la función.

Solución

Se considera la función definida por $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \le 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a)
Estudie la continuidad y derivabilidad de *f* .

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua.
Las dos ramas de la función f son funciones polinómicas, por tanto continuas y derivables en R las veces que nos haga falta, por tanto sólo nos queda ver la continuidad y derivabilidad en x = 1.
También vemos que sus gráficas son trozos de parábolas.
Veamos la continuidad y derivabilidad de f en x = 1

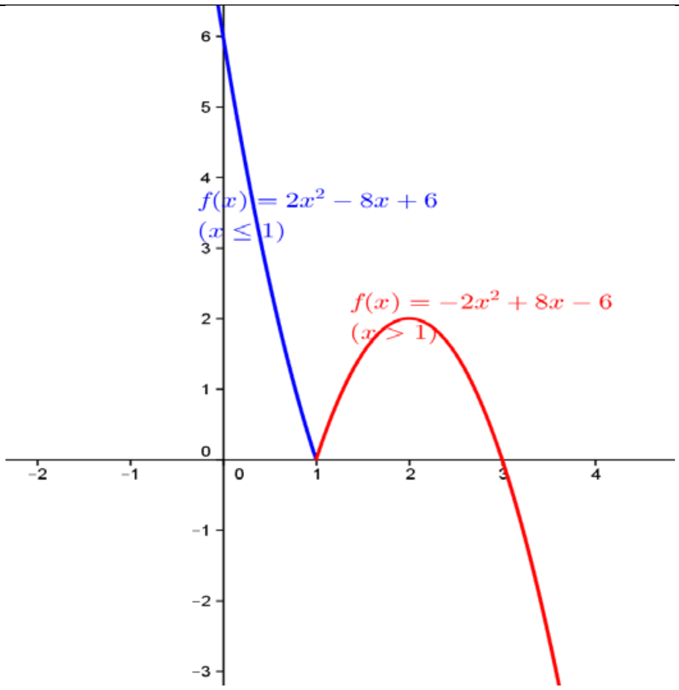
f es continua en x = 1, si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.
$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2x^2 - 8x + 6) = 0$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-2x^2 + 8x - 6) = 0$. Como 0 = 0, f es continua en x = 1.

Sabemos que f es derivable en x = 1, si f'(1+) = f'(1-), es decir $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).
Tenemos $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \le 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, de donde $f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{si } x < 1 \\ -4x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (4x - 8) = -4$.
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-4x + 8) = 4$. Como $-4 \ne 4$, **la función no es derivable en x = 1**.
b)
Represente la gráfica de *f* .

Si x < 1, $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$. Su gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba ($\cup$), porque el nº que multiplica a x^2 es positivo (+). La abscisa de su vértice V es la solución de f'(x) = 0, es decir 4x – 8 = 0, de donde x = 2, y V(2,f(2)) = V(2,-2), que no está en su dominio (x < 1). Los puntos de corte son:
Para x = 0, punto(0,f(0)) = (0,6).
Para f(x) = 0, $2x^2 - 8x + 6 = 0$, de donde x = 3 (no está en el dominio) y x = 1. Punto (1,f(1)) = (1,0).

Si x > 1, $f(x) = -2x^2 + 8x - 6$. Su gráfica es una parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo (-). La abscisa de su vértice V es la solución de f'(x) = 0, es decir -4x + 8 = 0, de donde x = 2, y V(2,f(2)) = V(2,2). Los puntos de corte son:
Para x = 0, punto(0,f(0)) = (0,-6), (no está en el dominio).
Para f(x) = 0, $-2x^2 + 8x - 6 = 0$, de donde x = 3 y x = 1 (n0 está en el dominio pero como es continua en dicho punto lo podemos considerar). Puntos (3,f(3)) = (3,0) y (1,f(1)) = (1,0)

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



c)
Indique los extremos relativos de la función.

Observando la gráfica, vemos que tiene un **máximo relativo en (2,2) que es el vértice de la parábola** de la rama x > 1, y **el punto (1,0) que es el mínimo relativo**. Observar que en este punto no es derivable, es decir los puntos extremos relativos no tienen que ser derivables.

EJERCICIO 3 A

Parte I

El 30% de los clientes de una tienda de música solicita la colaboración de los dependientes y el 20% realiza una compra antes de abandonar la tienda. El 15% de los clientes piden la colaboración de los dependientes y hacen una compra.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un cliente ni compre, ni solicite la colaboración de los dependientes.

b) (1 punto) Sabiendo que un cliente ha realizado una compra, ¿cuál es la probabilidad de que no haya solicitado colaboración a los dependientes?

Solución

El 30% de los clientes de una tienda de música solicita la colaboración de los dependientes y el 20% realiza una compra antes de abandonar la tienda. El 15% de los clientes piden la colaboración de los dependientes y hacen una compra.

Sean A y B los sucesos "cliente solicita la colaboración" y "compra antes de salir". También tenemos los sucesos contrarios A^C y B^C.

Del problema tenemos p(A) = 30% = 0'3; p(B) = 20% = 0'2; p(A∩B) = 15% = 0'15.

Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); p(A/B) = $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$; $p(A^C)$ = 1 - p(A);

$p(A^C \cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A \cup B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(A∪B).

a)
Calcule la probabilidad de que un cliente ni compre, ni solicite la colaboración de los dependientes.

Me están pidiendo p(ni ayuda y ni compra) = $p(A^C \cap B^C) = p(A \cup B)^C = 1 - p(A \cup B)$.

p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B) = 0'3 + 0'2 – 0'15 = 0'35, luego

p(ni ayuda y ni compra) = 1 - p(A∪B) = 1 - 0'35 **= 0'65.**

b)
Sabiendo que un cliente ha realizado una compra, ¿cuál es la probabilidad de que no haya solicitado colaboración a los dependientes?

Me están pidiendo p(solicita colaboración sabiendo que ha comprado) = **p(A/B)** = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ = (0'15)/0'2 =

= 0'75.

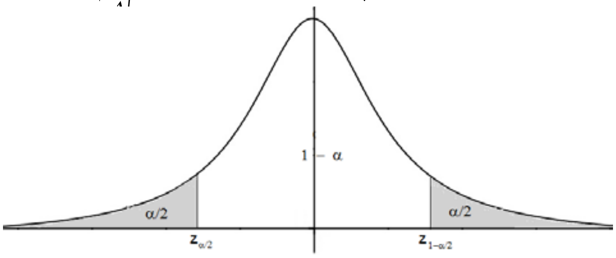
EJERCICIO 3 A

Parte II

Se ha lanzado al aire una moneda 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones.
a) (1 punto) Estime, mediante un intervalo de confianza, al 90%, la probabilidad de obtener cara.
b) (1 punto) Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 97%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Solución

Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral ***p,*** *el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$*.*



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción ***p*** *de las muestras es:*

$$I.C=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$*.*

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$*.*

Se ha lanzado al aire una moneda 200 veces y se ha obtenido cara en 120 ocasiones.

a)

Estime, mediante un intervalo de confianza, al 90%, la probabilidad de obtener cara.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 120/200 = 3/5, $\hat{q}$ = 1-3/5 = 2/5, n = 200, *nivel de confianza 1 – α* = 90% = 0'9, de donde α = 0'1 = 10% como *nivel de significación*.
De α = 0'1 tenemos α/2 = 0'05

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05 = 0'95$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'95 no viene en la tabla. Uno de los más próximos es 0'9495 y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64. Por tanto **el intervalo de confianza** pedido **es**:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{3}{5} - 1'64.\sqrt{\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}{200}}, \frac{3}{5} + 1'64.\sqrt{\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}}{200}}\right) \cong \mathbf{(0'54319;\ 0'65681)}$$

b)

Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 97%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 3/5, $\hat{q}$ = 2/5, n = 200, E < 0'03; *nivel de confianza 1 – α* = 97% = 0'97, de donde α = 0'03 = 3% como *nivel de significación*.
De α = 0'03 tenemos α/2 = 0'015

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor

0'985 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17.

De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2\cdot(3/5)\cdot(2/5)}{(0'03)^2}$ = 1255'70667, tenemos **n = 1256**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 B

La candidatura de un determinado grupo político para las elecciones municipales debe cumplir los siguientes requisitos: el número total de componentes de la candidatura debe estar comprendido entre 6 y 18 y el número de hombres (*x*) no debe exceder del doble del número de mujeres (*y*).
a) (2'5 puntos) Represente el recinto asociado a estas restricciones y calcule sus vértices.
b) (0'5 puntos) ¿Cuál es el mayor número de hombres que puede tener una candidatura que cumpla esas condiciones?

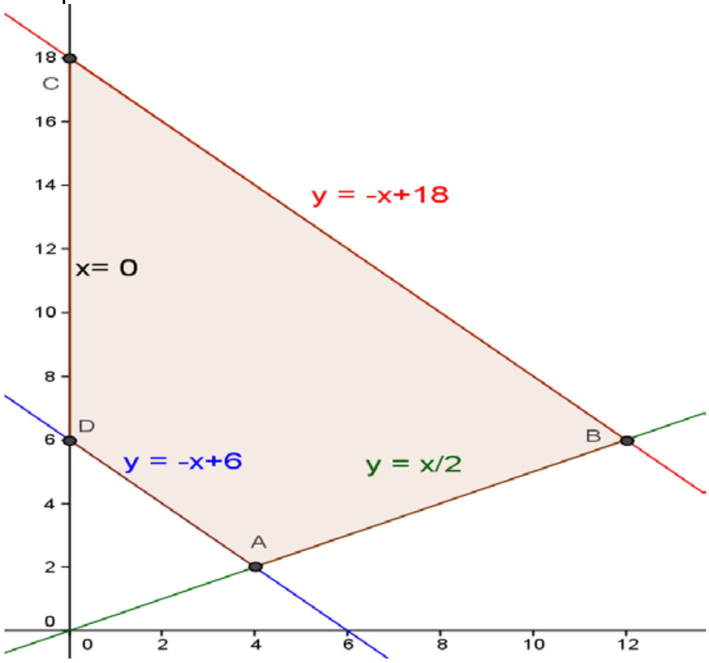
Solución

(a) y (b)
"x" = Número de hombres.
"y" = Número de hombres.
Función Objetivo **F(x,y) = x**. (número de hombres)
Restricciones:
El número total de componentes está comprendido entre 6 y 18 → $x + y \ge 6$.
El número total de componentes está comprendido entre 6 y 18 → $x + y \le 18$.
El número de hombres no debe exceder del doble del número de mujeres. → $x \le 2y$
Tiene que haber algún hombre. → $x \ge 0$

Las desigualdades $x + y \ge 6$; $x + y \le 18$; $x \le 2y$; $x \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x + y = 6$; $x + y = 18$; $x = 2y$; $x = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = -x + 6$; $y = -x + 18$; $y = x/2$; $x = 0$;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = x/2$ e $y = -x+6$; tenemos $x/2 = -x + 6$, luego $x = -2x + 12$, de donde $3x=12$, por tanto $x = 4$ e $y = 2$. El punto de corte es A(4,2)

De $y = x/2$ e $y = -x + 18$; tenemos $x/2= -x +18$, luego $x= -2x + 36$, de donde $3x=36$, por tanto $x=12$ e $y=6$. El punto de corte es B(12,6)

De $x = 0$ e $y = -x + 18$; tenemos $y = 18$, y el punto de corte es C(0,18)

De x = 0 e y = -x + 6; tenemos y = 6, y el punto de corte es D(0,6)

Vemos que los vértices del recinto son: A(4,2), B(12,6), C(0,18) y D(0,6).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = x en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(4,2), B(12,6), C(0,18) y D(0,6).

F(4,2) = (4) = 4; **F(12,6)** = (12) **= 12;** F(0,18) = (0) = 0; F(0,6) = (0) = 0**.**

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 12** (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice B(12,6), es decir el número máximo de hombres que cumple las condiciones de la candidatura es de 12, y está formada por 12 hombres y 6 mujeres.

EJERCICIO 2 B

Sea la función f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x - k}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

a) (2 puntos) Calcule el valor de *k* para que la función *f* sea continua en *x* = 0. Para ese valor de *k* , ¿es *f* derivable en *x* = 0?

b) (1 punto) Para *k* = 0, calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solución

Se considera la función f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x - k}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

a)

Calcule el valor de *k* para que la función *f* sea continua en *x*=0. Para ese valor de *k* , ¿es *f* derivable en *x*=0?

Sabemos que si una función es derivable, la función es continua.

Sabemos que f es continua en x = 0, si f(0) = $\lim_{x\to0-}$ f(x) = $\lim_{x\to0+}$ f(x).

f(0) = $\lim_{x\to0-}$ f(x) = $\lim_{x\to0-} \dfrac{x - k}{x + 1}$ = - k.

$\lim_{x\to0+}$ f(x) = $\lim_{x\to0+}$ (x^2 + 2x + 1) = 1. Como f es continua en x = 0, tenemos **k = -1**.

Para k = -1, tenemos f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$, de donde:

f'(x) = $\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x+ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Sabemos que f es derivable en x = 0, si f'(0+) = f'(0-), es decir $\lim_{x\to0-}$ f'(x) = $\lim_{x\to0+}$ f'(x). Estamos viendo la continuidad de la derivada (es más sencillo).

$\lim_{x\to0-}$ f'(x) = $\lim_{x\to0-}$ (0) = 0.

$\lim_{x\to0+}$ f(x) = $\lim_{x\to0+}$ (2x + 2) = 2. Como 0 ≠ 2, **la función no es derivable en x = 0**.

b)

Para *k* = 0, calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Para k = 0, tenemos f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$.

Si x > 0 tenemos f(x) = $\dfrac{x}{x + 1}$, luego $\lim_{x\to+\infty}$ f(x) = $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x + 1}$ = $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x}$ = $\lim_{x\to+\infty}$ (1) = 1.

Si $x \le 0$ tenemos $f(x) = x^2 + 2x + 1$, luego $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x + 1) = \lim_{x\to-\infty} (x^2) = (-\infty)^2 = +\infty$.

EJERCICIO 3 B

Parte I

En un Instituto se pueden practicar dos deportes: fútbol y baloncesto. Se sabe que el 48% de los alumnos practica fútbol pero no baloncesto, que el 15% practica baloncesto pero no fútbol y que el 28% no practica ninguno de los dos. Si se toma, al azar, un alumno de ese Instituto, calcule la probabilidad de que:
a) (0'75 puntos) Practique fútbol.
b) (0'5 puntos) Practique alguno de los dos deportes.
c) (0'75 puntos) No practique fútbol, sabiendo que practica baloncesto.

Solución

En un Instituto se pueden practicar dos deportes: fútbol y baloncesto. Se sabe que el 48% de los alumnos practica fútbol pero no baloncesto, que el 15% practica baloncesto pero no fútbol y que el 28% no practica ninguno de los dos. Si se toma, al azar, un alumno de ese Instituto, calcule la probabilidad de que.

Sean A y B los sucesos "practica futbol" y "practica baloncesto". También tenemos los sucesos contrarios A^C y B^C.

Del problema tenemos: $p(A \text{ y no}B) = p(A\cap B^C) = 48\% = 0'48$; $p(B \text{ y no}A) = p(B\cap A^C) = 15\% = 0'15$;
$p(\text{no}A \text{ y no}B) = p(A^C\cap B^C) = 28\% = 0'28$.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$;
$p(A^C) = 1 - p(A)$; $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$.

a)
Practique fútbol.

Me piden p(A).
De $p(A\cap B^C) = 0'48 = p(A) - p(A\cap B)$, tenemos $p(A) = 0'48 + p(A\cap B)$.
De $p(B\cap A^C) = 0'15 = p(B) - p(A\cap B)$, tenemos $p(B) = 0'15 + p(A\cap B)$.
De $p(A^C\cap B^C) = 0'28$, tenemos $p(A^C\cap B^C) = 0'28 = p(A\cup B)^C = 1 - p(A\cup B)$, de donde $p(A\cup B) = 1-0'28 = 0'72$.
De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$, tenemos $0'72 = 0'48 + p(A\cap B) + 0'15 + p(A\cap B) - p(A\cap B)$, luego
$p(A\cap B) = 0'72 – 0'48 – 0'15 = 0'09$.
Luego $\mathbf{p(A)} = 0'48 + 0'09 \mathbf{= 0'57}$.

b)
Practique alguno de los dos deportes.

Me piden p(A ó B) = $\mathbf{p(A\cup B)}$ = **0'72**, ya calculado en el apartado (a).

c)
No practique fútbol, sabiendo que practica baloncesto.

Me piden p(noA sabiendo B) = $\mathbf{p(A^C/B)} = \dfrac{p(A^c\cap B)}{p(B)} = \dfrac{0'15}{0'15+p(A\cap B)} = \dfrac{0'15}{0'15+0'09}$ = {los datos los hemos obtenido del apartado (a)} = 0'15/0'24 = **0'625.**

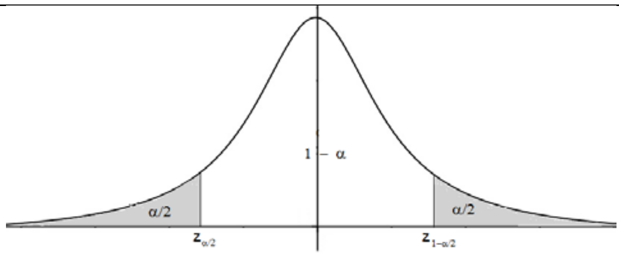
EJERCICIO 3 B

Parte II

Con los datos de una muestra aleatoria se estima que el porcentaje de hogares con conexión a Internet es del 30%, con un error máximo de la estimación de 0'06 y un nivel de confianza del 93%.
a) (0'5 puntos) Obtenga el intervalo de confianza, al 93%, de la proporción de hogares con conexión a Internet.
b) (1'5 puntos) Calcule el tamaño mínimo de la muestra utilizada.

Solución

Sabemos que si $n \ge 30$ para la proporción muestral ***p,*** *el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1- \hat{p}$, y generalmente escribimos* $\boldsymbol{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\boldsymbol{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** *de las muestras es:*

$$I.C=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es n =* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Con los datos de una muestra aleatoria se estima que el porcentaje de hogares con conexión a Internet es del 30%, con un error máximo de la estimación de 0'06 y un nivel de confianza del 93%.

a)

Obtenga el intervalo de confianza, al 93%, de la proporción de hogares con conexión a Internet.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 30% = 0'3, $\hat{q}$ = 1 – 0'3= 0'7, E < 0'06 = $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$; *nivel de confianza 1 – α =* = 97% = 0'97, de donde α = 0'03 = 7% como *nivel de significación*.

El **intervalo de confianza** pedido **es**: I.C.(**p**) = $\left(\hat{p} - E, \hat{p} + E\right)$ = (0'3 – 0'06, 0'3 + 0'06) = **(0'24; 0'36)**

b)

Calcule el tamaño mínimo de la muestra utilizada.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'3; $\hat{q}$ = 0'7; E < 0'04

De α = 0'03 tenemos α/2 = 0'015

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'985 viene en la tabla y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17

De n > $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2\cdot(0'3)\cdot(0'7)}{(0'06)^2} \cong$ 274'6858, tenemos **n = 275**.