OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) (1'5 puntos) Calcule $B.B^t - A.A^t$
b) (1'5 puntos) Halle la matriz *X* que verifica $(A.A^t).X = B$

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

a)
Calcule $B.B^t - A.A^t$

$$B.B^t - A.A^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}\cdot(-2\ \ 5) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ -8 & 20 \end{pmatrix}$$

b)
Halle la matriz *X* que verifica $(A.A^t).X = B$

Dada la matriz C si mediante transformaciones elementales de Gauss podemos pasar de la matriz (C|I) a la matriz (I|D), la matriz D es la inversa de C, es decir $D = C^{-1}$. También podemos calcular la matriz inversa con la fórmula $C^{-1} = \frac{1}{|C|}\cdot Adj(C^t)$.

$$((A\cdot A^t)\,|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) F_1+2\cdot F_2 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 1 & 2 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2+2\cdot F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 21 & 2 & 5 \end{array}\right) F_2:(21) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 8 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2/21 & 5/21 \end{array}\right) F_1-8\cdot F_2 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/21 & 2/21 \\ 0 & 1 & 2/21 & 5/21 \end{array}\right) = (I|\,(A\cdot A^t)^{-1})$$

, luego la matriz inversa pedida es $(A\cdot A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 5/21 & 2/21 \\ 2/21 & 5/21 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Veámoslo por la fórmula:

$|A\cdot A^t| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 4 = 21$; $(A\cdot A^t)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $Adj(A\cdot A^t)^t = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, luego $(A\cdot A^t)^{-1} = \frac{1}{|A\cdot A^t|}\cdot Adj(A\cdot A^t)^t =$
$= \frac{1}{21}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Como vemos nos da lo mismo.

Como existe $(A\cdot A^t)^{-1}$ multiplicando la expresión $(A.A^t).X = B$, por la izquierda por $(A\cdot A^t)^{-1}$ tenemos:
$(A\cdot A^t)^{-1}\cdot(A.A^t).X = (A\cdot A^t)^{-1}\cdot B$, de donde $I\cdot X = (A\cdot A^t)^{-1}\cdot B$, es decir $X = (A\cdot A^t)^{-1}\cdot B$.

$$X = (A\cdot A^t)^{-1}\cdot B = \frac{1}{21}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{21}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2_A

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x)=\begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si} \quad 0 \le x \le 6 \\ \dfrac{5x}{2} - 15 & \text{si} \quad 6 < x \le 10 \end{cases}$$

donde *x* representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
a) (0'75 puntos) Represente la función *f* .
b) (0'75 puntos) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.
c) (0'75 puntos) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?
d) (0'75 puntos) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Solución

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

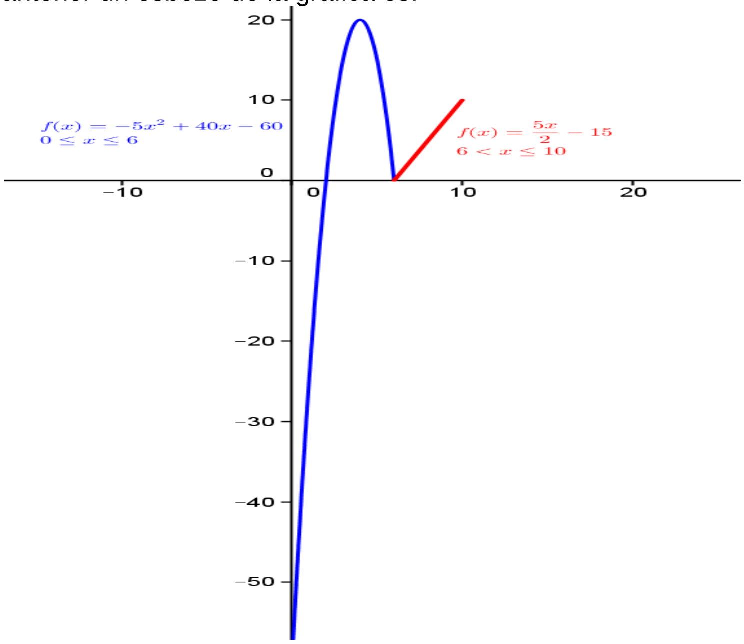
$$f(x)=\begin{cases} -5x^2+40x-60 & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ \dfrac{5x}{2}-15 & \text{si } 6 < x \le 10 \end{cases}$$ donde *x* representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a)
Represente la función *f* .

Si $0 \le x \le 6$, $f(x) = -5x^2 +40x - 60$. Su gráfica es un trozo de parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), porque el nº que multiplica a x^2 es negativo (-). La abscisa de su vértice V es la solución de $f'(x) = 0$, es decir $-10x + 40 = 0$, de donde $x = 4$, y $V(4,f(4)) = V(4,20)$, que está en su dominio ($0 \le x \le 6$), y es un máximo relativo. Veamos el valor de f en los extremos del intervalo, y sus puntos de corte:
Para $x = 0$, punto $(0,f(0)) = (0,-60)$.
Para $x = 6$, punto $(6,f(6)) = (6,0)$.
Para $f(x) = 0$, $-5x^2 +40x – 60 = 0$, $x^2 – 8x + 12 = 0$, de donde $x = 6$ (ya calculado) y $x = 2$. Punto $(2,f(2)) =$ $= (2,0)$.

Si $6 \le x \le 10$, $f(x) = 5x/2 - 15$. Su gráfica es un segmento con pendiente positiva (1ª derivada positiva), con dos valores de “x” es suficiente para dibujarlo. Le damos los valores en los extremos del intervalo.
Para $x = 6^*$ (no toco el 6), punto $(6^*,f(6)) = (6^*,0)$, (No lo piden pero vemos que f es continua en x = 6).
Para $x = 10$, punto $(10,f(10)) = (10,10)$.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



b)
Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

La empresa no tiene pérdidas si $f(x) \ge 0$. Observando la gráfica tenemos $2 \le x \le 10$, es decir l**a empresa no tiene pérdidas invirtiendo en publicidad desde 2000€ hasta 10000€**.
c)
¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

La empresa tiene beneficios nulos si $f(x) = 0$. Observando la gráfica vemos que ocurre en $x = 2$ y $x = 6$, es decir l**a empresa tiene beneficios nulos para x = 2000€ y x = 6000€**.
d)
Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

Observando la gráfica vemos que el beneficio máximo se encuentra en el vértice de la rama parabólica, que es un máximo relativo y en este caso también el máximo absoluto. Es el punto (4,20), por tanto l**a empresa tiene beneficio máximo de 20000€ gastando 4000€ en publicidad.**

EJERCICIO 3_A

Parte I

Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:
A: "Obtener al menos dos veces cara" y *B*: "Obtener cara en el segundo lanzamiento".
a) (1 punto) Describa el espacio muestral asociado al experimento. Calcule p(A) y p(A∪B).
b) (1 punto) Los sucesos *A* y *B*, ¿son independientes?, ¿son incompatibles?

Solución

Se lanza una moneda tres veces y se consideran los sucesos:
A: "Obtener al menos dos veces cara" y B: "Obtener cara en el segundo lanzamiento".
a)
Describa el espacio muestral asociado al experimento. Calcule p(A) y p(A∪B).

Sean C, X, A y B los sucesos "salir cara al lanzar una moneda", "salir cruz al lanzar una moneda", "Obtener al menos dos veces cara" y "Obtener cara en el segundo lanzamiento".

Sabemos que al lanzar un moneda tres veces los sucesos son independientes, pues los resultados de un lanzamiento no influyen en el otro, por Laplace p(suceso) = $\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$, dos sucesos son incompatibles si p(A∩B) = 0, e independientes si p(A∩B) = p(A)·p(B)

Espacio Muestral = E = {CCC, CCX,CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX}, vemos que hay 2x2x2 = 8 sucesos.
A: "Obtener al menos dos veces cara" = { CCC, CCX, CXC, XCC }
B: "Obtener cara en el segundo lanzamiento" = {CCC, CCX, XCC, XCX}
A∩B = { CCC, CCX, XCC }

p(A) = $\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$ = 4/8 = 1/2.

p(A∩B) = $\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$ = 3/8.

p(B) = $\frac{\text{Nº de casos favorables}}{\text{Nº de casos posibles}}$ = 4/8 = 1/2.

b)
Los sucesos *A* y *B*, ¿son independientes?, ¿son incompatibles?

Como p(A∩B) = 3/8 ≠ 0, los sucesos A y B no son incompatibles.
Como p(A∩B) = 3/8 ≠ (1/2)·(1/3), los sucesos A y B no son independientes.

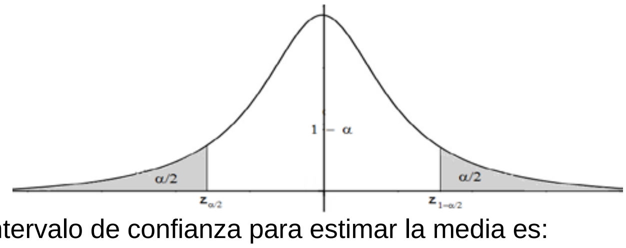
EJERCICIO 3_A

Parte II

En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 8.
Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y su media ha sido 67.
a) (1 punto) Calcule el intervalo de confianza, al 93%, para la media de la población.
b) (1 punto) ¿Cuántos datos, como mínimo, son necesarios para estimar, con un nivel de confianza del 99%, la media de la población con un error no superior a 2?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media.*

Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$*.*

En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 8.
Se ha elegido, al azar, una muestra de tamaño 100 y su media ha sido 67.
a)
Calcule el intervalo de confianza, al 93%, para la media de la población.

Datos del problema: $\sigma = 8$, $n = 100$, $\bar{x} = 67$, nivel de confianza = 93% = 0'93 = 1 - α, de donde α = 0'07.

De 1 – α = 0'93, tenemos α = 1- 0'93 = 0'07, de donde $\alpha/2$ = 0'07/2 = 0'035
De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'035 = 0'965. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'965 no viene, y la más próxima es 0'9649 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'81, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(67 - 1'81\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}, 67 + 1'81\cdot\frac{8}{\sqrt{100}}\right) \cong \mathbf{(65'552, 68'448)}$$

b)
¿Cuántos datos, como mínimo, son necesarios para estimar, con un nivel de confianza del 99%, la media de la población con un error no superior a 2?

Datos del problema: $\sigma = 8$, $E < 2$, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'005.

De 1 – α = 0'99, tenemos α = 1- 0'99 = 0'01, de donde $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005
De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'005 = 0'995. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y la una de las más próxima es 0'9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'57, por tanto tamaño mínimo pedido es:

$$n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'57\cdot 8}{2}\right)^2$$ = 105'6784, es decir **el tamaño mínimo es n = 106**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(3 puntos) Una fábrica produce bombillas de bajo consumo que vende a 1 euro cada una, y focos halógenos que vende a 1'5 euros. La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades, entre bombillas y focos, si bien no se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos.
Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. Determine cuántas bombillas y cuántos focos debe producir para obtener los máximos ingresos posibles y cuáles serían éstos.

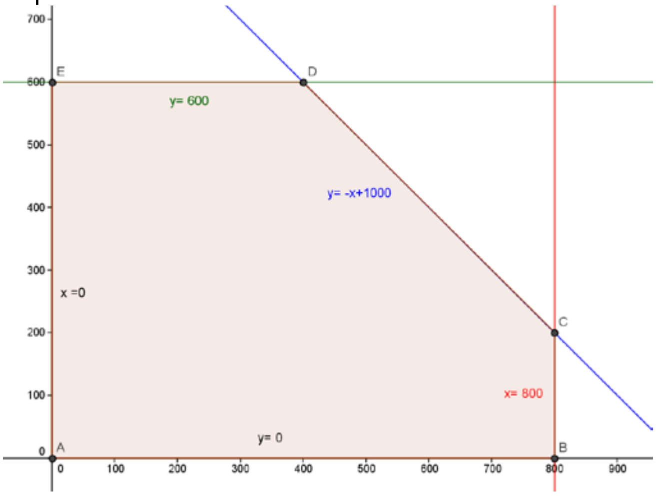
Solución

"x" = Número de bombillas.
"y" = Número de focos.
Función Objetivo **F(x,y) = x + 1'5y**. (vende las bombillas a 1€ , y focos a 1'5€)
Restricciones:
La capacidad máxima de fabricación es de 1000 unidades → $x + y \leq 1000$.
No se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos → $x \leq 800$.
No se pueden fabricar más de 800 bombillas ni más de 600 focos. → $y \leq 600$
Se sabe que la fábrica vende todo lo que produce. → $x \geq 0$ e $y \geq 0$

Las desigualdades $x + y \leq 1000$; $x \leq 800$; $y \leq 600$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $x + y = 1000$; $x = 800$; $y = 600$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos y = -x + 1000; x = 800; y = 600; x = 0; y = 0;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0. El punto de corte es A(0,0)
De x = 800 e y = 0. El punto de corte es B(800,0)
De x = 800 e y = -x + 1000; tenemos y = 200, y el punto de corte es C(800,200)
De y = 600 e y = -x + 1000; tenemos 600 = -x + 1000, de donde x = 400 e y = 600, y el punto de corte es D(400,600)
De x = 0 e y = 600. Tenemos el punto de corte es E(0,600)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0); B(800,0); C(800,200); D(400,600) ;E(0,600).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = x + 1'5y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0); B(800,0); C(800,200); D(400,600) ;E(0,600).

F(0,0) = (0) + 1'5(0) = 0; F(800,0) = (800) + 1'5(0) = 800**;** F(800,200) = (800) + 1'5(200) = 1100; **F(400,600)** = (400) + 1'5(600) = **1300**; F(0,600) = (0) + 1'5(600) = 900**.**

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 1300** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice D(400,600), es decir el número beneficio máximo es de 1300€ y se alcanza fabricando 400 bombillas y 600 focos halógenos**.

EJERCICIO 2_B

a) (1'5 puntos) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x=3$. Calcule los coeficientes *a* y *b* y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

b) (1'5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución

a)
La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcule los coeficientes *a* y *b* y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

Sabemos que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en R las veces que nos haga falta.
Sabemos que los extremos relativos anulan la 1ª derivada f'(x). Además si f'(c) = 0 y f''(c) < 0, x = c es un máximo relatico, y si f''(c) > 0, x = c es un mínimo relativo.
También sabemos que los puntos de inflexión anulan la 2ª derivada f''(x).

La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en $x = 2$ y un punto de inflexión en $x = 3$. Calcule los coeficientes *a* y *b* y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2^a$

De tiene un extremo relativo en $x = 2$, tenemos $f'(2) = 0$, luego $3(2)^2 + 2a(2) + b = 0 = 12 + 4a + b$.
De tiene un punto de inflexión en $x = 3$, tenemos $f''(3) = 0$, luego $6(3) + 2a = 0$, luego **a = -9.**
Entrando en $12 + 4a + b = 0$, tenemos $12 + 4(-9) + b = 0$, luego **b = 24.**
La función pedida es $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$.

Como $f'(2) = 0$ y $f''(2) = 6(2) – 18 = -6 < 0$, resulta que **x = 2 es un máximo relativo.**
b)

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

Recordamos que la recta tangente en x = 3 es "$y – g(3) = g'(3)\cdot(x – 3)$". Algunas derivadas y reglas de derivación.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(k)' = 0$.

$g(x) = \dfrac{x}{x-2}$; $g'(x) = \dfrac{1\cdot(x-2) - x\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{-2}{(x-2)^2}$

Luego $g(3) = 3/1 = 3$ y $g'(3) = -2/1^2 = -2$. La recta tangente es $y – 3 = -2\cdot(x – 3)$, es decir $y = -2x + 9$.

EJERCICIO 3_B

Parte I

En un tribunal se han examinado 140 alumnos de un Instituto A y 150 de otro Instituto B. Aprobaron el 80% de los alumnos del A y el 72% del B.
a) (1 punto) Determine el tanto por ciento de alumnos aprobados por ese tribunal.
b) (1 punto) Un alumno, elegido al azar, no ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Instituto B?

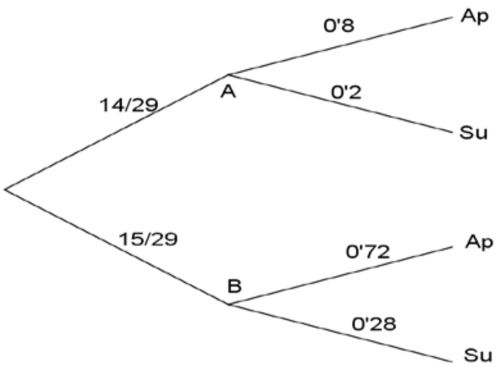
Solución

En un tribunal se han examinado 140 alumnos de un Instituto A y 150 de otro Instituto B. Aprobaron el 80% de los alumnos del A y el 72% del B.

Llamemos A, B, Ap y Su, a los sucesos siguientes, "alumnos del instituto A", "alumnos del instituto A", "alumnos aprobados" y "alumnos suspensos", respectivamente.

Además tenemos p(A) = 140/(140+150) = 14/29, p(B) = 150/(140+150) = 15/29, p(Ap/A) = 80% = 0'8 y p(Ap/B) = 72% = 0'72

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Determine el tanto por ciento de alumnos aprobados por ese tribunal.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de aprobados (tanto por ciento) es:

p(Ap) = p(A).p(Ap/A) + p(B).p(Ap/B) = (14/29)·(0'8) + (15/29)·(0'72) = 22/29 ≅ 0'7586 = **75'86%**.

b)

Un alumno, elegido al azar, no ha aprobado, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca al Instituto B?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/Su) =} \frac{p(B\cap Su)}{p(Su)} = \frac{p(B).p(Su/B)}{1\text{ - }p(Ap)} = \frac{(15/29)\cdot(0'28)}{1\text{ - }(22/29)} = \frac{(15/29)\cdot(0'28)}{7/29} = 3/5 = \mathbf{0'6}.$$

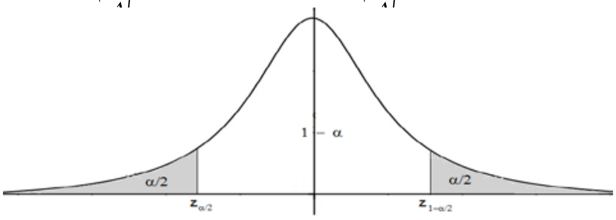
EJERCICIO 3_B

Parte II

(2 puntos) Para estimar la proporción de estudiantes de una Universidad que está a favor de un aumento del importe de las becas, se entrevistó, aleatoriamente, a 500 estudiantes, de los cuales 465 respondieron afirmativamente. Calcule el intervalo de confianza, al 98%, en el cual se hallará la proporción de la población universitaria que está a favor del aumento de la cuantía de las becas.

Solución

*Sabemos que si $n \geq 30$ para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Para estimar la proporción de estudiantes de una Universidad que está a favor de un aumento del importe de las becas, se entrevistó, aleatoriamente, a 500 estudiantes, de los cuales 465 respondieron afirmativamente. Calcule el intervalo de confianza, al 98%, en el cual se hallará la proporción de la población universitaria que está a favor del aumento de la cuantía de las becas.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 465/500 = 0'93, $\hat{q}$ = 1 - 0'93 = 0'07, n = 500, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 98% = = 0'98, de donde α = 0'02 = 2% como *nivel de significación*.

De α = 0'02 tenemos $\alpha/2$ = 0'01

De la igualdad $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'99 no viene en la tabla y el más próximo es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'93 - 2'33.\sqrt{\frac{0'93.0'07}{500}}, 0'93 + 2'33.\sqrt{\frac{0'93.0'07}{500}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0'9034; 0'9565).**