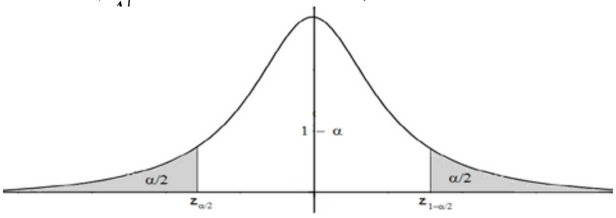
INTERVALOS DE CONFIANZA PARA PROPORCIONES (2007)

Ejercicio 1.-

Tomada, al azar, una muestra de 120 estudiantes de una Universidad, se encontró que 54 de ellos hablaban inglés. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes que hablan el idioma inglés entre los estudiantes de esa Universidad.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$*.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$*.*

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (b-a)/2$*, de donde el tamaño de la muestra es* $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2}$*.*

Tomada, al azar, una muestra de 120 estudiantes de una Universidad, se encontró que 54 de ellos hablaban inglés. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de estudiantes que hablan el idioma inglés entre los estudiantes de esa Universidad.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 54/120 = 0'45, $\hat{q}$ = 1 - 0'45 = 0'55, n = 120, nivel de confianza 1 – α = 90% = = 0'90, de donde α = 0'10 = 10% como *nivel de significación*.
De α = 0'10 tenemos α/2 = 0'05

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05 = 0'95$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'95 no viene en la tabla y el uno de los más próximo es 0'9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'45 - 1'64\cdot\sqrt{\frac{0'45\cdot 0'55}{120}}, 0'45 + 1'64\cdot\sqrt{\frac{0'45\cdot 0'55}{120}}\right) \cong$$

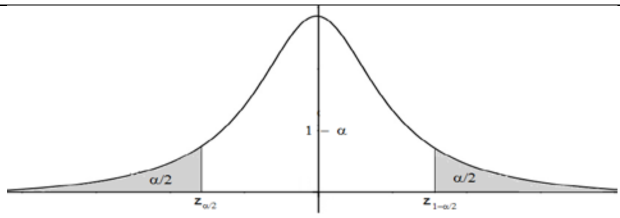
≅ **(0'3755; 0'5245)**

Ejercicio 2.-

Con los datos del ejercicio anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir que la cota del error que se comete al estimar, por un intervalo de confianza, la proporción de alumnos que hablan inglés en esa Universidad no sea superior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%. ¿Cuántos alumnos tendríamos que tomar, como mínimo, en la muestra?

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$*.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Con los datos del ejercicio anterior, se pretende repetir la experiencia para conseguir que la cota del error que se comete al estimar, por un intervalo de confianza, la proporción de alumnos que hablan inglés en esa Universidad no sea superior a 0,05, con un nivel de confianza del 99%. ¿Cuántos alumnos tendríamos que tomar, como mínimo, en la muestra?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0’45, $\hat{q}$ = 0’55, E < 0’05, nivel de confianza 1 – α = 99% = 0’99, de donde α = 0’01= = 1% como *nivel de significación*.

De α = 0’01 tenemos α/2 = 0’005

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0’005 = 0’995, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’995 no viene en la tabla y el uno de los más próximo es 0’9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2’57.

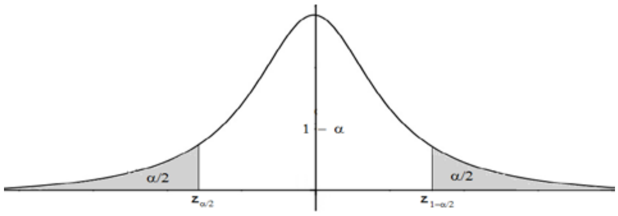
De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'57)^2\cdot(0'45)\cdot(0'55)}{(0'05)^2}$ = 653’8851, tenemos **n = 654**.

Ejercicio 3.-

Tomada una muestra aleatoria de 300 personas mayores de edad de una gran ciudad, se obtuvo que 105 habían votado a un determinado partido X. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza que permita estimar la proporción de votantes del partido X en esa ciudad.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p,** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Tomada una muestra aleatoria de 300 personas mayores de edad de una gran ciudad, se obtuvo que 105 habían votado a un determinado partido X. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza que permita estimar la proporción de votantes del partido X en esa ciudad.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 105/300 = 0'35, $\hat{q}$ = 1 - 0'35 = 0'65, n = 300, nivel de confianza 1 – α = 90% = = 0'90, de donde α = 0'10 = 10% como *nivel de significación*.
De α = 0'10 tenemos α/2 = 0'05

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05 = 0'95$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'95 no viene en la tabla y el uno de los más próximo es 0'9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'35 - 1'64\cdot\sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{300}}, 0'35 + 1'64\cdot\sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{300}}\right) \cong$$

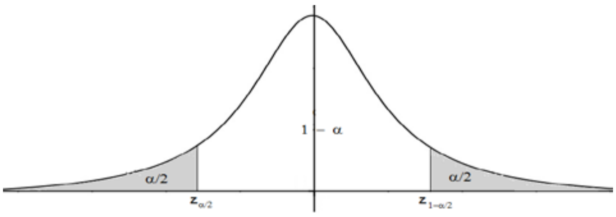
$\cong$ **(0'3048; 0'3952)**

Ejercicio 4.-

En una muestra aleatoria de 300 personas mayores de edad de una gran ciudad se encontró que 105 leían un determinado periódico X. A la vista de esos datos se pretende seleccionar una nueva muestra para conseguir una cota de error de 3 centésimas como máximo, con un nivel de confianza del 95%, para la estimación de la proporción de lectores de ese periódico por medio de un intervalo de confianza. Deduzca el número de individuos de la población que, como mínimo, debe tener la muestra.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En una muestra aleatoria de 300 personas mayores de edad de una gran ciudad se encontró que 105 leían un determinado periódico X. A la vista de esos datos se pretende seleccionar una nueva muestra para conseguir una cota de error de 3 centésimas como máximo, con un nivel de confianza del 95%, para la estimación de la proporción de lectores de ese periódico por medio de un intervalo de confianza. Deduzca el número de individuos de la población que, como mínimo, debe tener la muestra.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 105/300 = 0'35, $\hat{q}$ = 1 - 0'65 = 0'07, E < 0'03, nivel de confianza 1 – α = 95% = = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos α/2 = 0'025

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

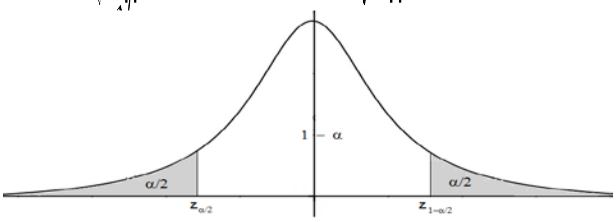
De n > $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'96)^2\cdot(0'35)\cdot(0'65)}{(0'03)^2}$ $\cong$ 971'7111, tenemos **n = 972**.

Ejercicio 5.-

Se desea estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción **p** de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n. Si el porcentaje de individuos daltónicos en una muestra aleatoria es igual al 30%, calcule el valor mínimo de n para que, con un nivel de confianza del 95%, el error que se cometa en la estimación sea inferior a 0'031.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal N($\hat{p}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$) que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q}$ = 1- $\hat{p}$, y generalmente escribimos **p** $\approx$ N($\hat{p}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$) o **p** → N($\hat{p}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$).*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$)=1-α/2.

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es n = $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Se desea estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción **p** de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n. Si el porcentaje de individuos daltónicos en una muestra aleatoria es igual al 30%, calcule el valor mínimo de n para que, con un nivel de confianza del 95%, el error que se cometa en la estimación sea inferior a 0'031.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 30% = 0'3, $\hat{q}$ = 1 - 0'3 = 0'07, E < 0'031, nivel de confianza 1 – α = 95% = = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos α/2 = 0'025.

De la igualdad p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

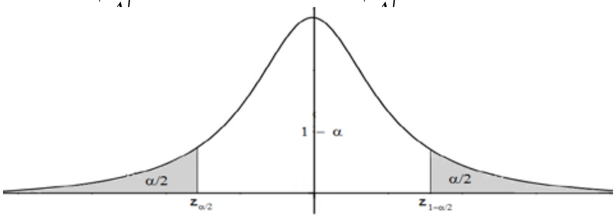
De n > $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'96)^2\cdot(0'3)\cdot(0'7)}{(0'031)^2}$ $\cong$ 839'4755, tenemos **n = 840**.

Ejercicio 6.-

Para estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción **p** de individuos miopes de una población, se ha tomado una muestra de 80 individuos con la que se ha obtenido un porcentaje de individuos miopes del 35%. Determine, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de miopes de toda la población.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal N($\hat{p}$, $\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$) que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q}$ = 1- $\hat{p}$, y* *generalmente escribimos* **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* **p** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** *de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (b-a)/2$, *de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Para estimar, por medio de un intervalo de confianza, la proporción **p** de individuos miopes de una población, se ha tomado una muestra de 80 individuos con la que se ha obtenido un porcentaje de individuos miopes del 35%. Determine, usando un nivel de confianza del 99%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de miopes de toda la población.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 35% = 0'35, $\hat{q}$ = 1 - 0'35 = 0'65, n = 80, nivel de confianza 1 – α = 999 = = 0'98, de donde α = 0'01 = 1% como *nivel de significación*.
De α = 0'01 tenemos $\alpha/2$ = 0'005.

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'995 no viene en la tabla y uno de los más próximos es 0'9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'57. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'35 - 2'57.\sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{80}}, 0'35 + 2'57.\sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{80}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0'21295; 0'48705).**

Ejercicio 7.-

En una encuesta realizada a 500 mujeres adultas de una población se encontró que 300 de ellas están casadas actualmente. Construya con estos datos un intervalo de confianza, con un nivel del 90%, para la proporción de mujeres adultas actualmente casadas en esa población.

Solución

Sabemos que si $n \ge 30$ *para la proporción muestral* **p,** *el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, *y*

generalmente escribimos **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* **p** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** *de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* *p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$)=1-α/2.*

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es n =* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En una encuesta realizada a 500 mujeres adultas de una población se encontró que 300 de ellas están casadas actualmente. Construya con estos datos un intervalo de confianza, con un nivel del 90%, para la proporción de mujeres adultas actualmente casadas en esa población.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 300/500 = 0'6, $\hat{q}$ = 1 - 0'6 = 0'4, n = 500, nivel de confianza 1 – α = 90% =
= 0'90, de donde α = 0'10 = 10% como *nivel de significación*.
De α = 0'10 tenemos α/2 = 0'05

De la igualdad p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'05 = 0'95, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'95 no viene en la tabla y uno de los valores más próximos es 0'9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'6 - 1'64.\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{500}}, 0'6 - 1'64.\sqrt{\frac{0'6\cdot 0'4}{500}}\right) \cong$$

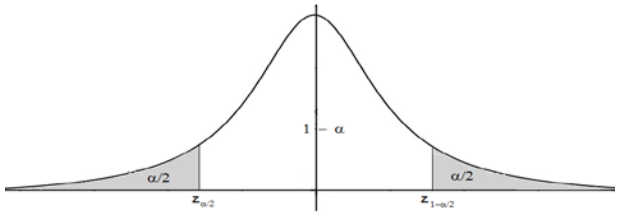
≅ **(0'56407; 0'63593)**

Ejercicio 8.-

Una muestra aleatoria de automóviles tomada en una zona turística ha permitido obtener un intervalo de confianza, al nivel del 95%, para estimar de la proporción de matrículas extranjeras de esa zona, siendo sus extremos 0,232 y 0,368.
a) Determine el valor de la proporción estimada a través de esa muestra y una cota del error de estimación a este nivel de confianza.
b) Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería la cota de error, si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 696 matrículas?

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p,** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q}$ *= 1-* $\hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$*.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$)=1-α/2. Vemos que a + b = 2·$\hat{p}$, de donde $\hat{p}$ = (a + b)/2.

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es n =* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Una muestra aleatoria de automóviles tomada en una zona turística ha permitido obtener un intervalo de confianza, al nivel del 95%, para estimar de la proporción de matrículas extranjeras de esa zona, siendo sus extremos 0'232 y 0'368.
a)
Determine el valor de la proporción estimada a través de esa muestra y una cota del error de estimación a este nivel de confianza.

Datos del problema: a = 0'232, b = 0'368, de donde $\hat{p}$ **= (a + b)/2** = (0'232 + 0'368)/2 = **0'3 que es lo que me piden**, $\hat{q}$ = 1 - 0'3 = 0'7, nivel de confianza 1 – α = 95% = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

Una cota del error es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b - a)/2 = (0'368 – 0'232)/2 = 0'068, tenemos **E < 0'068**.

b)
Utilizando el mismo nivel de confianza, ¿cuál sería la cota de error, si esa misma proporción se hubiera observado en una muestra de 696 matrículas?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 0'3, $\hat{q}$ = 1 - 0'3 = 0'7, n = 696, $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

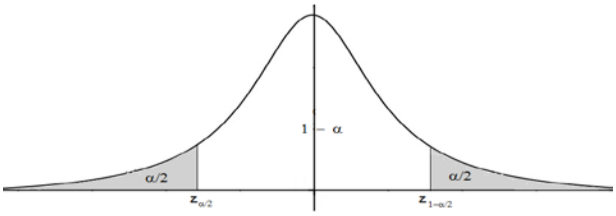
De $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'3\cdot 0'7}{696}} \cong$ 0'0340456, tenemos **E < 0'03405**.

Ejercicio 9.-

Para conocer la audiencia de uno de sus programas (proporción de televidentes que lo prefieren), una cadena de TV ha encuestado a 1000 personas elegidas al azar obteniendo una proporción muestral del 33% de personas favorables a ese programa. Calcule una cota del error de estimación, por medio de un intervalo de confianza, con un nivel del 92%.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p,** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$*.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2}$.

Para conocer la audiencia de uno de sus programas (proporción de televidentes que lo prefieren), una cadena de TV ha encuestado a 1000 personas elegidas al azar obteniendo una proporción muestral del 33% de personas favorables a ese programa. Calcule una cota del error de estimación, por medio de un intervalo de confianza, con un nivel del 92%.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 33% = 0'33, $\hat{q}$ = 1 - 0'33 = 0'67, n = 1000, nivel de confianza 1 – α = 92% = = 0'98, de donde α = 0'02 = 2% como *nivel de significación*.
De α = 0'02 tenemos $\alpha/2$ = 0'01

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, que se mira en la tabla de la distribución Normal

N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'99 no viene en la tabla y el más próximo es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33. Por tanto el error cometido es:

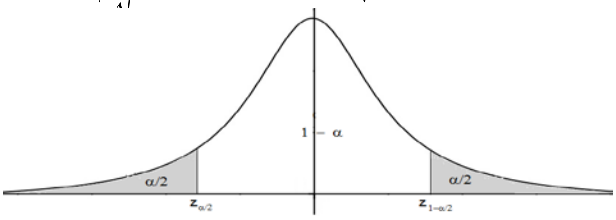
$E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2'33\cdot\sqrt{\frac{0'33\cdot 0'67}{1000}} \cong$ 0'03464577, luego el error es **E < 0'0346458.**

Ejercicio 10.-

Se va a tomar una muestra aleatoria de 600 recién nacidos en este año en una ciudad para estimar la proporción de varones entre los recién nacidos de esa ciudad, mediante un intervalo de confianza con un nivel del 95%.
¿Cuál será el error de estimación a ese nivel si se observan 234 varones en la muestra?

Solución

Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral ***p****, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$*.*



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción ***p*** *de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$*.*

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 . \hat{p} . \hat{q}}{E^2}$*.*

Se va a tomar una muestra aleatoria de 600 recién nacidos en este año en una ciudad para estimar la proporción de varones entre los recién nacidos de esa ciudad, mediante un intervalo de confianza con un nivel del 95%.
¿Cuál será el error de estimación a ese nivel si se observan 234 varones en la muestra?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 234/600 = 0'39, $\hat{q}$ = 1 - 0'39 = 0'61, n = 600, nivel de confianza 1 – α = 95% = = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos α/2 = 0'025

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto el error de estimación a ese nivel es:

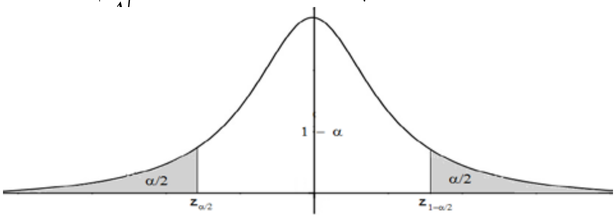
$E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'39\cdot 0'61}{600}} \cong$ 0'0390281, luego el error es **E < 0'03903.**

Ejercicio 11.-

Para estimar la proporción de familias con un solo hijo en una ciudad, se ha tomado una muestra de familias al azar, de las cuales el 30% tiene un solo hijo. ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que, con esos datos, un intervalo de confianza de esa proporción a un nivel del 95% tenga una cota de error de 0'06, como máximo?

Solución

Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral ***p****, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue* *una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* ***p*** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* ***p*** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$*.*



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción ***p*** *de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (b-a)/2$*, de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Para estimar la proporción de familias con un solo hijo en una ciudad, se ha tomado una muestra de familias al azar, de las cuales el 30% tiene un solo hijo. ¿Cuál es el mínimo tamaño muestral necesario para que, con esos datos, un intervalo de confianza de esa proporción a un nivel del 95% tenga una cota de error de 0'06, como máximo?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 30% = 0'3, $\hat{q}$ = 1 - 0'3 = 0'7, E < 0'06, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 95% = = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto el tamaño mínimo de la muestra es:

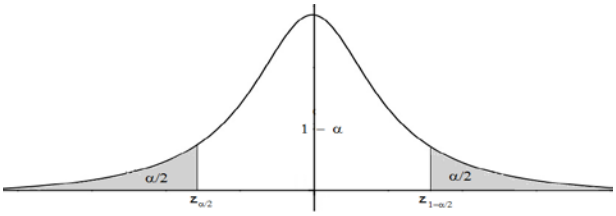
De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'96)^2\cdot(0'3)\cdot(0'7)}{(0'06)^2} \cong 224'0933$, tenemos **n = 225.**

Ejercicio 12.-

Una cadena de TV quiere saber si la audiencia de uno de sus programas sigue manteniéndose en el 25% de los espectadores.
¿Cuántos espectadores se deberían encuestar al azar, como mínimo, para tener un nivel de confianza del 90% de que el error en la estimación de la proporción actual sea igual o inferior a 0'03?

Solución

Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral ***p,*** *el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* ***p*** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* ***p*** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$*.*



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción ***p*** *de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Una cadena de TV quiere saber si la audiencia de uno de sus programas sigue manteniéndose en el 25% de los espectadores.
¿Cuántos espectadores se deberían encuestar al azar, como mínimo, para tener un nivel de confianza del 90% de que el error en la estimación de la proporción actual sea igual o inferior a 0'03?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 25% = 0'25, $\hat{q}$ = 1 - 0'25 = 0'75, E < 0'03, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 90% =
= 0'90, de donde α = 0'10 = 10% como *nivel de significación*.
De α = 0'10 tenemos $\alpha/2$ = 0'05

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'05 = 0'95, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'95 no viene en la tabla y el uno de los más próximo es 0'9495 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64. Por tanto el tamaño mínimo de la muestra es:

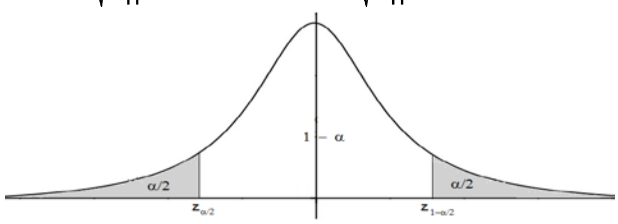
De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'64)^2\cdot(0'25)\cdot(0'75)}{(0'03)^2} \cong$ 560'3333, tenemos **n = 561**.

Ejercicio 13.-

Calcule el tamaño mínimo de una muestra aleatoria de jóvenes entre 18 y 25 años para tener una confianza del 95% de que el error que se cometerá al estimar la proporción de fumadores entre esas edades no sea superior a 0,05, sabiendo que en una encuesta previa se ha encontrado un 32% de fumadores entre estos jóvenes.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p,** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o **p** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Calcule el tamaño mínimo de una muestra aleatoria de jóvenes entre 18 y 25 años para tener una confianza del 95% de que el error que se cometerá al estimar la proporción de fumadores entre esas edades no sea superior a 0'05, sabiendo que en una encuesta previa se ha encontrado un 32% de fumadores entre estos jóvenes.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 32% = 0'32, $\hat{q}$ = 1 - 0'32 = 0'68, E < 0'05, nivel de confianza 1 – α = 95% = = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto el tamaño mínimo de la muestra es:

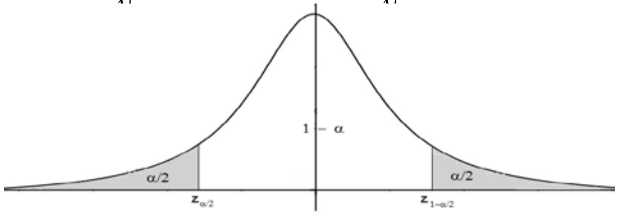
De n > $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'96)^2\cdot(0'32)\cdot(0'68)}{(0'05)^2} \cong$ 334'3728, tenemos **n = 335**.

Ejercicio 14.-

Se va a tomar una muestra aleatoria de 600 recién nacidos en este año en una ciudad para estimar la proporción de varones entre los recién nacidos de esa ciudad, mediante un intervalo de confianza con un nivel del 95%. ¿Con qué proporción estimada será máxima la amplitud de ese intervalo? ¿Cuál es la amplitud máxima?

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p,** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal N(*$\hat{p}$*,* $\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$*) que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q}$ *= 1-* $\hat{p}$*, y generalmente escribimos **p** ≈ N(*$\hat{p}$*,* $\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$*) o **p** → N(*$\hat{p}$*,* $\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$*).*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica p(Z ≤* $z_{1-\alpha/2}$*)=1-α/2.*

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es n =* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$*.*

Se va a tomar una muestra aleatoria de 600 recién nacidos en este año en una ciudad para estimar la proporción de varones entre los recién nacidos de esa ciudad, mediante un intervalo de confianza con un nivel del 95%. ¿Con qué proporción estimada será máxima la amplitud de ese intervalo? ¿Cuál es la amplitud máxima?

Datos del problema: Como la muestra es aleatoria se supone que la mitad son varones, es decir $\hat{p}$ = **1/2, que es una de las que me piden**, $\hat{q}$ = 1 – 1/2 = 1/2, n = 600, nivel de confianza 1 – α = 95% = = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'5 - 1'96.\sqrt{\frac{0'5.0'5}{600}},\ 0'5 - 1'96.\sqrt{\frac{0'5.0'5}{600}},\right) \cong$$

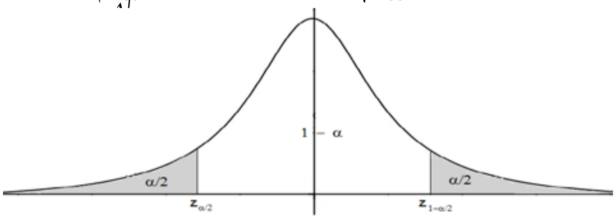
≅ (0'459992; 0'540008), y la amplitud pedida es 0'540008 - 0'459992 = 0'080016, que sabemos que es el doble del error cometido.

Ejercicio 15.-

Para estimar la proporción de consumidores que prefieren un determinado refresco, por medio de un intervalo de confianza, se ha tomado una muestra al azar de 1075 consumidores, entre los que se han encontrado 516 que lo prefieren. Determine una cota del error cometido para esa estimación a un nivel de confianza del 95%.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, *y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Para estimar la proporción de consumidores que prefieren un determinado refresco, por medio de un intervalo de confianza, se ha tomado una muestra al azar de 1075 consumidores, entre los que se han encontrado 516 que lo prefieren. Determine una cota del error cometido para esa estimación a un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 516/1075 = 0'48, $\hat{q}$ = 1 - 0'48 = 0'52, n = 1075, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 95% = = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*.
De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto el error de estimación a ese nivel es:

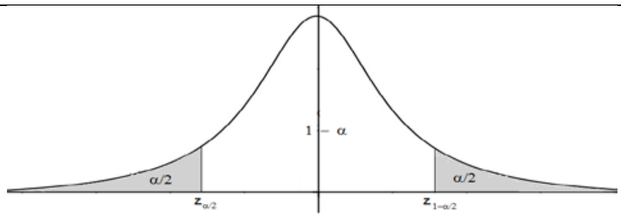
$E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'48\cdot0'52}{1075}} \cong$ 0'029865798, luego el error es **E < 0'0298658.**

Ejercicio 16.-

En una muestra aleatoria de 600 coches de una ciudad, 120 son de color blanco. Construya un intervalo de confianza de la proporción de coches de color blanco con un nivel de confianza del 98%.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, *y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En una muestra aleatoria de 600 coches de una ciudad, 120 son de color blanco. Construya un intervalo de confianza de la proporción de coches de color blanco con un nivel de confianza del 98%.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 120/600 = 0'2, $\hat{q}$ = 1 - 0'2 = 0'8, n = 600, nivel de confianza 1 – α = 98% =
= 0'98, de donde α = 0'02 = 2% como *nivel de significación*.
De α = 0'02 tenemos $\alpha/2$ = 0'01

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'99 no viene en la tabla y el más próximo es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'2 - 2'33\cdot\sqrt{\frac{0'2\cdot 0'8}{600}}, 0'2 - 2'33\cdot\sqrt{\frac{0'2\cdot 0'8}{600}}\right) \cong$$

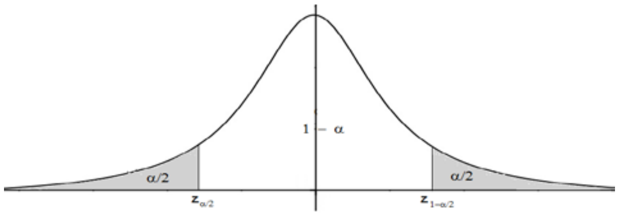
$\cong$ **(0'16195; 0'23805)**

Ejercicio 17.-

Se estima la proporción de varones adultos, residentes en una población, con obesidad severa (30<IMC≤40), mediante una muestra aleatoria de tamaño 500. Se obtiene una estimación de varones con obesidad severa del 18%. Utilizando un nivel de confianza del 98%, ¿cuál es el error máximo que se cometerá al estimar, por medio de un intervalo de confianza, esa proporción?

Solución

*Sabemos que si $n \ge 30$ para la proporción muestral **p,** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o **p** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Se estima la proporción de varones adultos, residentes en una población, con obesidad severa (30<IMC≤40), mediante una muestra aleatoria de tamaño 500. Se obtiene una estimación de varones con obesidad severa del 18%. Utilizando un nivel de confianza del 98%, ¿cuál es el error máximo que se cometerá al estimar, por medio de un intervalo de confianza, esa proporción?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 18% = 0'18, $\hat{q}$ = 1 - 0'18 = 0'82, n = 500, nivel de confianza 1 – α = 98% =
= 0'98, de donde α = 0'02 = 2% como *nivel de significación*.
De α = 0'02 tenemos $\alpha/2$ = 0'01

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'99 no viene en la tabla y el más próximo es 0'9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33. Por tanto el error de estimación a ese nivel es:

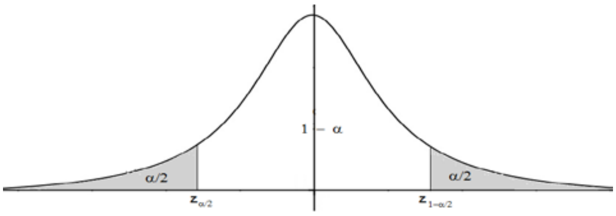
E < $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2'33\cdot\sqrt{\dfrac{0'18\cdot 0'82}{500}} \cong$ 0'0400326, luego el error es **E < 0'04.**

Ejercicio 18.-

Se desea estimar la proporción de adultos que leen un determinado diario local por medio de un intervalo de confianza. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra que garantice, aún en la situación más desfavorable, un error de la estimación inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 95%.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es n =* $\dfrac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Se desea estimar la proporción de adultos que leen un determinado diario local por medio de un intervalo de confianza. Obtenga el tamaño mínimo de la muestra que garantice, aún en la situación más desfavorable, un error de la estimación inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 95%.

Datos del problema: E < 0'03, el caso mas desfavorable es que la mitad lo lea es decir $\hat{p}$ = 1/2 = 0'5, $\hat{q}$ = 1 - 0'5 = 0'5, nivel de confianza 1 – α = 95% = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*. De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto el tamaño mínimo de la muestra es:

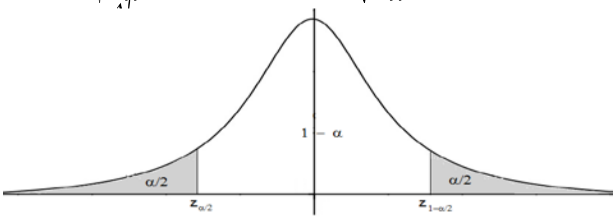
De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'96)^2\cdot(0'5)\cdot(0'5)}{(0'03)^2} \cong 1067'1111$, tenemos **n = 1068**.

Ejercicio 19.-

Se estima, por un intervalo de confianza, la proporción de hogares con conexión a Internet utilizando una muestra aleatoria y con un nivel de confianza del 96%. Se obtiene así, una proporción estimada del 28%, con un error máximo del 6%. ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra utilizada?

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o **p** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (b-a)/2$, de donde el tamaños de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Se estima, por un intervalo de confianza, la proporción de hogares con conexión a Internet utilizando una muestra aleatoria y con un nivel de confianza del 96%. Se obtiene así, una proporción estimada del 28%, con un error máximo del 6%. ¿Cuál es el tamaño mínimo de la muestra utilizada?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 28% = 0'28, $\hat{q}$ = 1 - 0'28 = 0'72, E < 6% = 0'06, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 96% = = 0'96, de donde α = 0'04 = 4% como *nivel de significación*.
De α = 0'04 tenemos $\alpha/2$ = 0'02

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'98 no viene en la tabla y uno de los más próximos es 0'9798 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'06. Por tanto el tamaño mínimo de la muestra es:

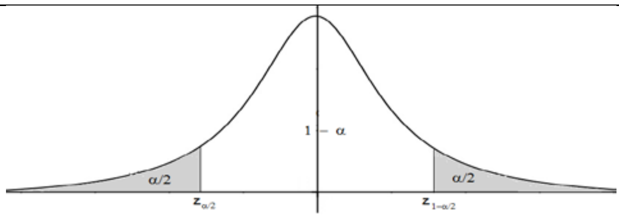
De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'06)^2\cdot(0'28)\cdot(0'72)}{(0'06)^2} \cong 237'6416$, tenemos **n = 238**.

Ejercicio 20.-

Mediante una muestra aleatoria de tamaño 400 se estima la proporción de residentes en Sevilla que tienen intención de asistir a un partido de fútbol entre el Betis y el C.F. Sevilla. Si para un nivel de confianza del 95% resulta un error máximo en la estimación del 3%. Obtenga el valor de la estimación, sabiendo que es inferior a 0,25.

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos **p** $\approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o **p** $\to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

Mediante una muestra aleatoria de tamaño 400 se estima la proporción de residentes en Sevilla que tienen intención de asistir a un partido de fútbol entre el Betis y el C.F. Sevilla. Si para un nivel de confianza del 95% resulta un error máximo en la estimación del 3%. Obtenga el valor de la estimación, sabiendo que es inferior a 0,25.

Datos del problema: n = 400, E < 3% = 0'03, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 95% = 0'95, de donde α = 0'05 = = 5% como *nivel de significación*. De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

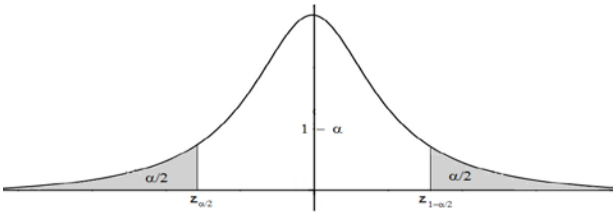
De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96. Por tanto de la expresión $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$, tenemos: $n\cdot E^2 = (z_{1-\alpha/2})^2\cdot \hat{p}\cdot(1 - \hat{p})$, es decir $400\cdot(0'03)^2 = (1'96)^2\cdot\hat{p}\cdot(1-\hat{p})$, luego $0'36 = 3'8416(\hat{p} - (\hat{p})^2)$, tenemos la ecuación de 2º grado $3'8416\cdot(\hat{p})^2 - 3'8416\cdot\hat{p} + 0'36 = 0$. Resolviéndola obtenemos $\hat{p} \cong 0'895$ y $\hat{p} \cong 0'10466$. Como nos dicen que el valor de la estimación de la proporción es menor que 0'25 nos queda **como solución $\hat{p} \cong$ 0'105.**

Ejercicio 21.-

En el diario "CÓRDOBA" del día 20 de Enero de 2.004 se publicó el resultado de un sondeo sobre intención de voto en las elecciones al Parlamento Andaluz del 14 de marzo de 2.004. Según la ficha técnica de la encuesta, el tamaño de la muestra fue de 5000 individuos, el nivel de confianza utilizado del 95%, y el error máximo de la estimación de los que no tienen decidido el voto del 1%.
En la página 2, del mencionado diario, se estima que el 13,3% de los andaluces no tienen decidido el voto.
Analice la coherencia del resultado de la estimación con la ficha técnica de la encuesta, si se utiliza un muestreo aleatorio simple.

Solución

*Sabemos que si $n \ge 30$ para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ o $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2}$.

En el diario "CÓRDOBA" del día 20 de Enero de 2.004 se publicó el resultado de un sondeo sobre intención de voto en las elecciones al Parlamento Andaluz del 14 de marzo de 2.004. Según la ficha técnica de la encuesta, el tamaño de la muestra fue de 5000 individuos, el nivel de confianza utilizado del 95%, y el error máximo de la estimación de los que no tienen decidido el voto del 1%.
En la página 2, del mencionado diario, se estima que el 13'3% de los andaluces no tienen decidido el voto.
Analice la coherencia del resultado de la estimación con la ficha técnica de la encuesta, si se utiliza un muestreo aleatorio simple.

Datos del problema: E < 1% = 0'01, $\hat{p}$ = 13'3% = 0'133, $\hat{q}$ = 1 - 0'133 = 0'867, n = 5000, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 95% = 0'95, de donde α = 0'05 = 5% como *nivel de significación*. De α = 0'05 tenemos $\alpha/2$ = 0'025

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'025 = 0'975, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'975 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.
Vamos a ver si el tamaño de la muestra ha sido el adecuado.

De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2} = \frac{(1'96)^2 \cdot (0'133) \cdot (0'867)}{(0'01)^2}$ = 4429'787376, tenemos **n = 4430, que es menor de lso 5000 que han tomado, por tanto podemos decir que el resultado es coherente**.

b)
Se pretende repetir la experiencia para conseguir que el error cometido sea inferior a 0'03, con un nivel de confianza del 97%. ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 3/5, $\hat{q}$ = 2/5, n = 200, E < 0'03; *nivel de confianza 1 – α* = 97% = 0'97, de donde α = 0'03 = 3% como *nivel de significación*.
De α = 0'03 tenemos α/2 = 0'015

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0'015 = 0'985, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'985 viene en la tabla y corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'17.

De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2} = \frac{(2'17)^2 \cdot (3/5) \cdot (2/5)}{(0'03)^2}$ = 1255'70667, tenemos **n = 1256**.

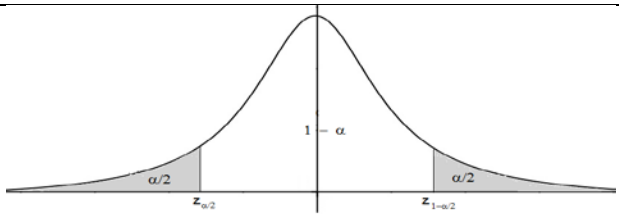
Ejercicio 22.-

En una investigación de mercado se pregunta a 600 personas sobre el interés en consumir un determinado producto, si éste se comercializara en la ciudad. De ellas 55% manifiestan su intención de consumirlo. Con posterioridad a la encuesta, el fabricante del producto comercial exige que el error de la estimación sea inferior al 3%, con una confianza del 98%.
a) ¿Cumple la investigación los requisitos exigidos por el fabricante?
b) En caso negativo, ¿cuál es el valor mínimo del tamaño de la muestra para cumplir con las exigencias del fabricante?

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue una normal $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}})$ que es la distribución muestral de proporciones, donde $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, y generalmente escribimos $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}})$ o $\mathbf{p} \rightarrow N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}})$.*

INTERVALOS DE CONFIANZA PARA PROPORCIONES (2007)



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$I.C.(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaños de la muestra es n = $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En una investigación de mercado se pregunta a 600 personas sobre el interés en consumir un determinado producto, si éste se comercializara en la ciudad. De ellas 55% manifiestan su intención de consumirlo. Con posterioridad a la encuesta, el fabricante del producto comercial exige que el error de la estimación sea inferior al 3%, con una confianza del 98%.
a) ¿Cumple la investigación los requisitos exigidos por el fabricante?
b) En caso negativo, ¿cuál es el valor mínimo del tamaño de la muestra para cumplir con las exigencias del fabricante?

Datos del problema: $\hat{p}$ = 55% = 0’55, $\hat{q}$ = 1 - 0’55 = 0’45, n = 600, E < 3% = 0’03, nivel de confianza $1 - \alpha$ = = 98% = 0’98, de donde α = 0’02 = 2% como *nivel de significación*.
De α = 0’02 tenemos $\alpha/2$ = 0’01

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0’01 = 0’99, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’99 no viene en la tabla y el más próximo es 0’9901 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2’33. Por tanto el error de estimación a ese nivel es:

$E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2'33\cdot\sqrt{\frac{0'55\cdot 0'45}{600}} \cong$ 0’044732, luego el error es **E < 0’045, por tanto la investigación no cumple los requisitos del fabricante (según ella E< 0’03), y nos ha salido un error mayor de 0’03.**

El tamaño de la muestra tendría que haber sido:
De $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'33)^2.0'55.0'45}{(0'03)^2}$ = 1492’9475, tenemos **n = 1493**.