SOLUCIONES PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DEL AÑO 2007-2008 ANDALUCÍA
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, calcule el valor de *a* para que A^2 sea la matriz nula.

b) (2 puntos) Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcule la matriz $(M^{-1}.M^T)^2$

Solución

a)

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, calcule el valor de *a* para que A^2 sea la matriz nula

$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+a & a \\ a^2 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Igualando ambas matrices tenemos:
$a^2 + a = 0$
$a^2 = 0$
$a = 0$
$a = 0$
La única solución común a las cuatro ecuaciones es **a = 0**.

b)

Dada la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcule la matriz $(M^{-1}.M^T)^2$

Sabemos que si mediante transformaciones elementales podemos pasar de (A|I) a (I|B), la matriz B es la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2+F_1(-1)} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)_{F_2(-1)} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)^{F_1+F_2(-2)} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Luego $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $M^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $M^{-1}.M^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$(M^{-1}.M^T)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Sea la función *f* definida mediante $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

a) (0'5 puntos) Determine los puntos de corte con los ejes.
b) (1 punto) Estudie su curvatura.
c) (1 punto) Determine sus asíntotas.
d) (0'5 puntos) Represente la función.

Solución

Se considera la función *f* definida mediante $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

Antes de empezar la función que me han dado es una hipérbola, que como sabemos tiene una asíntota vertical (A.V.) y otra horizontal (A.H.), y su dominio es todo R menos el nº que anula el denominador, que será la A.V. Si igualamos el denominador a cero, tenemos 2x-1=0, de donde x = 1/2.

a)

Determine los puntos de corte con los ejes.

Para x = 0 tenemos $f(0) = \dfrac{0+1}{0-1} = -1$. **Corte con el eje OY, (0,-1).**

Para f(x) = 0, tenemos x + 1 = 0(se iguala sólo el numerador a cero), de donde x = -1. **Corte con el eje OX, (-1,0).**

b)

Estudie su curvatura. Nos están pidiendo que estudiemos su 2ª derivada, que es la que nos indica su curvatura.

$f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$

$f'(x) = \dfrac{1(2x-1)-(x+1).2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2x-1-2x-2}{(2x-1)^2} = \dfrac{-3}{(2x-1)^2}$

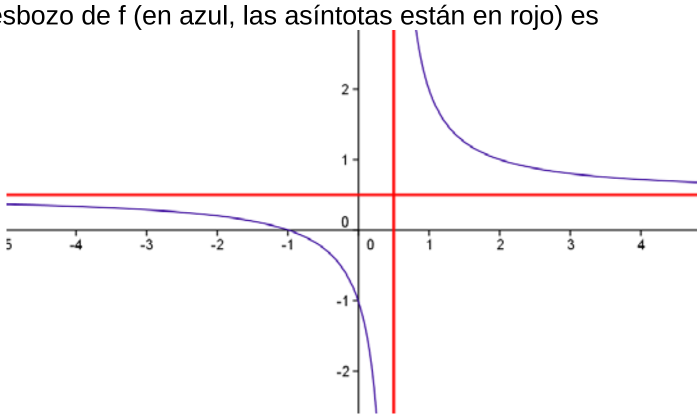
$f''(x) = \dfrac{3.2(2x-1).2}{(2x-1)^4} = \dfrac{12(2x-1)}{(2x-1)^4}$

De f''(x) = 0, tenemos 6(2x-1) = 0, es decir 2x-1 = 0, luego la solución es **x = 1/2**. Ya advertí antes que este punto no está en el dominio, será una A.V., no obstante a su izquierda y derecha la curvatura es distinta.
Como f''(0) = (4)/(+) > 0, **f es convexa (∪) en (-∞,1/2).**
Como f''(1) = (-4)/(+) < 0, **f es cóncava (∩) en (1/2,∞).**
Ya he dicho que x = 1/2 no es punto de inflexión, porque no está en el dominio.
c)
Determine sus asíntotas.

Como $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$ es un cociente, y tiene igual grado numerador y denominador, tenemos una A.H, y es la misma es ± ∞. Además como es un cociente, los números que anulan el denominador son candidatos a ser A.V. , vamos a comprobarlo.

Como $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, **la recta y = 1/2, es la A.H**. Como en el apartado (a) vimos que (0,-1) era un punto de corte con los ejes, por la forma de la hipérbola, está por debajo de la A.H en + ∞, y por encima de la A.H en - ∞.

Como $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{+1}{0+} = +\infty$, la recta **x = 1/2 es la A.V.** , un pelín a su derecha la función está en + ∞, y por la forma de las hipérbolas, un pelín a su izquierda la función está en - ∞.
d)
Represente la función.
Con todo lo anterior un esbozo de f (en azul, las asíntotas están en rojo) es



EJERCICIO 3
Parte I
Laura tiene en su monedero 6 monedas francesas, 2 italianas y 4 españolas. Vicente tiene 9 francesas y 3 italianas. Cada uno saca, al azar, una moneda de su monedero y observa la nacionalidad.
a) (0'5 puntos) Obtenga el espacio muestral asociado al experimento.
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que las monedas extraídas no sean de la misma nacionalidad?
c) (0'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las monedas extraídas sea francesa?

Solución

Llamemos LaF, LaI, LaE, ViF y ViI, a los sucesos "Laura tiene una moneda francesa, italiana o española" y "Vicente tiene una moneda francesa o italiana".

a)
Obtenga el espacio muestral asociado al experimento.
Espacio muestral de Laura E_1 = { LaF, LaI, LaE }, con p(LaF) = 6/12, p(LaI) = 2/12 y con p(LaE) = 4/12,
Espacio muestral de Vicente E_2 = { ViF, ViI}, con p(ViF) = 9/12 y p(ViI) = 3/12,

Espacio muestral producto E = { LaF_ ViF, LaF_ ViI, LaI ViF, LaI_ ViI, LaE_ViF, LaE_ ViI}
Si observamos hay 6 sucesos elementales compuestos, es decir la probabilidad de cada uno de ellos es el producto de las probabilidades de los sucesos que lo componen

b)
¿Cuál es la probabilidad de que las monedas extraídas no sean de la misma nacionalidad?
Suceso = {distinta nacionalidad}
p(A) = p(LaF y ViI) + p(LaI y ViF) + p(LaE y ViF) + p(LaE y ViI) =

$$= \frac{6}{12}.\frac{3}{12} + \frac{2}{12}.\frac{9}{12} + \frac{3}{12}.\frac{9}{12} + \frac{4}{12}.\frac{3}{12} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12} \cong 0'58333$$

c)
¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las monedas extraídas sea francesa?
Suceso C = {ninguna moneda francesas}

Piden p(C) = p(LaE y ViI) + p(LaI y ViI) $= \frac{4}{12}.\frac{3}{12} + \frac{2}{12}.\frac{3}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8} = 0'125$

EJERCICIO 3

Parte II

Se desea estimar la proporción de individuos zurdos en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos resultando que 45 de ellos son zurdos.
a) (1'5 puntos) Calcule, usando un nivel de confianza del 97%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de individuos zurdos de la población.
b) (0'5 puntos) ¿Sería mayor o menor el error de estimación si se usara un nivel de confianza del 95%? Razone la respuesta.

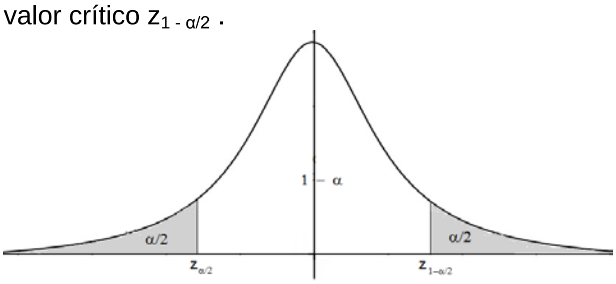
Solución

a)
Para construir el intervalo:

- Se elige un *estimador* del parámetro que se desea estimar ($\overline{X}$ para **μ**, y $\hat{p}$ para **p**), en nuestro caso es de proporción luego es $\hat{p} = \frac{45}{300} = \frac{3}{20} = 0'15$
- Se elige *un nivel de confianza 1 – α* con el que se desea construir el intervalo, que nos lo dan y es del 97%, es decir 1 – α = 97% = 0'97, de donde α = 0'03 = 3% como *nivel de significación*.
- El intervalo centrado en el estadístico $\hat{p}$ obtenido de la muestra sería:

$$\text{I.C.} = \text{I}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \text{ para estimar } \mathbf{p}$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) tal que $p(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$.
De esa igualdad se deduce que $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.



$p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 – 0'03/2 = 0'985$, mirando en la tabla de la N(0,1), que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'17$.
Por tanto el intervalo de confianza pedido es

$$\text{I.C.}=\text{I}(\mathbf{p})=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'15 - 2'17.\sqrt{\frac{0'15.0'85}{300}},\ 0'15 + 2'17.\sqrt{\frac{0'15.0'85}{300}}\right) \cong$$

≅ (0'15 – 0'044736 ; 0'15 + 0'044736) = (0'105264; 0'194736)
b)
Sabemos que el error máximo = E = $z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, en nuestro caso:

$$E = z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2'17.\sqrt{\frac{0'15.0'85}{300}} \cong 0'044736 = 4'44736\%$$

Si tomásemos 1 – α = 95% = 0’95, de donde α = 0’05 = 5%, de donde $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05/2 =$ = 0’975, mirando en la tabla de la N(0,1), que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, y el error sería:

$$E = z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1'96.\sqrt{\frac{0'15.0'85}{300}} \cong 0'0440406 = 4'40406\%$$

Es decir el error sería más pequeño, porque se multiplica por una cantidad más pequeña ($z_{1-\alpha/2} = 1'96$).

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 26 kg de mantequilla para hacer dos tipos de tartas, A y B. Para hacer una hornada de tartas del tipo A se necesitan 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla, mientras que para hacer una hornada de tartas del tipo B se necesitan 6 kg de harina, 0’5 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Sabiendo que el beneficio que se obtiene al vender una hornada del tipo A es de 20 € y de 30€ al vender una hornada del tipo B, determine cuántas hornadas de cada tipo debe hacer y vender para maximizar sus beneficios.

Solución

Leyendo el problema podemos formar la siguiente tabla

	Tarta tipo A	Tarta tipo B	Restricciones	
Nº tartas	x	y	$x \ge 0$; $y \ge 0$	
Harina	3x	6y	$3x+6y \le 150$	
Azúcar	x	0’5y	$x+0'5y \le 22$	
Mantequilla	x	y	$x+y \le 26$	
Beneficio			F(x,y) = 20x+30y	Maximizar

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones (restricciones):

$3x+6y \le 150$; $x + 0'5y \le 22$; $x + y \le 26$; $x \ge 0$; $y \ge 0$;

La función beneficio es F(x,y) = 20x + 30y

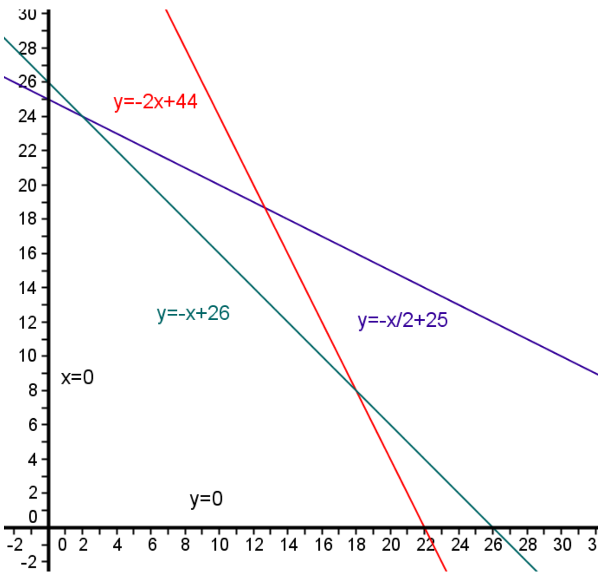
Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita “y”, para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible.

Inecuaciones : $3x+6y \le 150$; $x + 0'5y \le 22$; $x + y \le 26$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

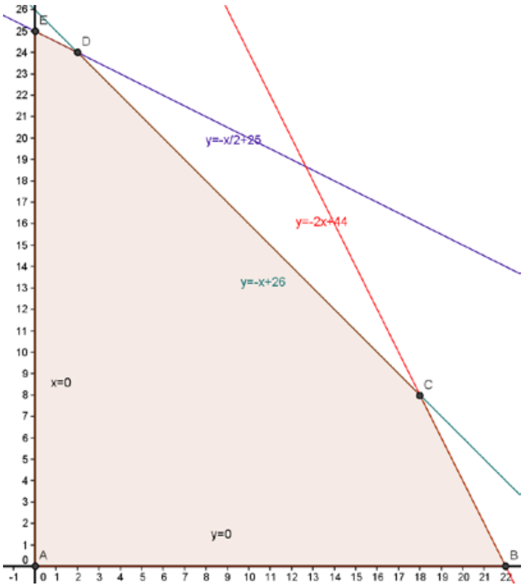
$x+2y \le 50$; $2x + y \le 44$; $x + y \le 26$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Rectas: y = -x/2+25; y = -2x+44; y = -x + 26; x = 0 (eje OY), y = 0 (eje OX)

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades “$y \le -x/2+25$; $y \le -2x+44$; $y \le -x + 26$; $x \ge 0$, $y \ge 0$”, vemos que el recinto factible, y los vértices A, C, D y E de dicha región son:



De x= 0 e y=0, Tenemos el punto de corte A(0,0)
De y= -2x+44 e y = 0, tenemos x = 22, y el punto de corte B(22,0)
De y= -2x+44 e y = -x+26, tenemos -2x+44 = -x+26, de donde 18 = x, luego y = 8, el punto de corte es C(18,8).
De y= -x/2+25 e y = -x+26, tenemos -x/2+25 = -x+26, de donde -x+50 = -2x+52, por tanto x = 2, luego y = 24, el punto de corte es D(2,24).
De y= -x/2+25 y x = 0, tenemos y = 25, y el punto de corte E(0,25)

El recinto tiene por vértices A(0,0), B(22,0), C(18,8), D(2,24) y E(0,25).

Consideremos la función beneficio F(x,y) = 20x + 30y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(0,0) = 20(0) + 30(0) = 0, F(22,0) = 20(22) + 30(0) = 440; F(18,8) = 20(18) + 30(8) = 600, F(2,24) = 20(2) + 30(24) = 760, F(0,25) = 20(0) + 30(25) = 750.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 760** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el punto (2,24).**

El mayor beneficio es **760 € y se obtiene elaborando 2 tartas del tipo A y 24 tartas del tipo B**

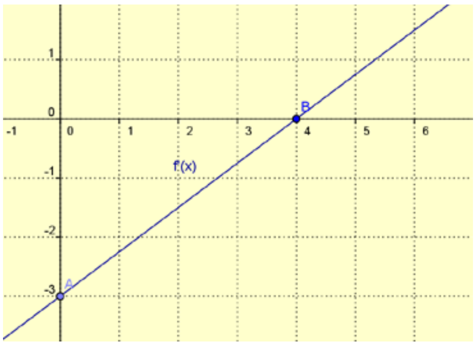
EJERCICIO 2

a) (1’5 puntos) La gráfica de la derivada de una función *f* es la recta que pasa por los puntos (0,-3) y (4,0). Estudie la monotonía de la función *f* .
b) (1’5 puntos) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = (3x + 1)^3.L(x^2 + 1); \quad h(x) = \frac{e^x}{7x^5 - 4}$$

Solución

a)
La gráfica de la derivada de una función *f* es la recta que pasa por los puntos (0,-3) y (4,0). Estudie la monotonía de la función *f* .
F’ pasa por (0,-3) y (4,0), luego la gráfica de f’ es:



Como f'(x) < 0 en $(-\infty,4)$, f(x) es estrictamente decreciente en $(-\infty,4)$.
Como f'(x) > 0 en $(4,\infty)$, f(x) es estrictamente creciente en $(4,\infty)$.
Por definición x = 4 es un mínimo relativo.

b)
Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = (3x + 1)^3.L(x^2 + 1); \quad h(x) = \frac{e^x}{7x^5 - 4}$$

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También algo sobre extremos absolutos

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$;

$(e^{kx})' = k.e^{kx}$.; $(f(x) . g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(L(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$;$(k)' = 0$.

$G(x) = (3x + 1)^3.L(x^2 + 1)$; $g'(x) = 3(3x + 1)^2.(3).L(x^2 + 1) + (3x + 1)^3.\frac{2x}{x^2+1}$

$h(x) = \frac{e^x}{7x^5 - 4}$; $f'(x) = \frac{e^x.(7x^5-4) - e^x.35x^4}{(7x^5-4)^2} = \frac{e^x.(7x^5 - 35x^4 - 4)}{(7x^5-4)^2}$.

EJERCICIO 3

Parte I

De los 150 coches de un concesionario, 90 tienen motor diesel y el resto de gasolina. De los coches con motor diesel, 72 son nuevos y el resto usados; mientras que de los coches con motor de gasolina hay el mismo número de coches nuevos que de usados. Se elige, al azar, un coche de dicho concesionario; calcule la probabilidad de que:

a) (1 punto) Sea nuevo.
b) (1 punto) Tenga motor diesel, sabiendo que es usado.

Solución

El problema es fácil de hacer utilizando una tabla de contingencia.
Leyendo el problema tenemos:

	Diesel	Gasolina	Total
Nuevo	72	30	
Usado			
Total	90		150

Completamos la tabla de contingencia

	Diesel	Gasolina	Total
Nuevo	72	30	102
Usado	18	30	48
Total	90	60	150

Calculamos ya las probabilidades:
a)
Sea nuevo.
P(Nuevo) = 102/150 = 17/25

b)
enga motor diesel, sabiendo que es usado.
p(Diesel y Usado) = 18/48 = 3/8

EJERCICIO 3
Parte II
(2 puntos) Una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 6. ¿De qué tamaño, como mínimo, se debe elegir una muestra que nos permita estimar la media de esa variable con un error máximo de 2 y una confianza del 99%?

Solución

Cual es el tamaño de la muestra, que nos permita estimar la media de esa variable con un error máximo de 2 y una confianza del 99%?

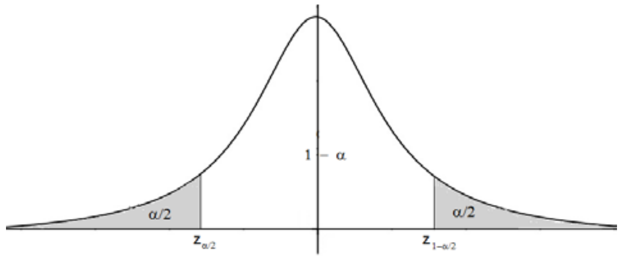
Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una normal N(μ,σ), la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Datos σ = 6; E = 2; 1 - α = 99%. Piden "n".

Sabemos que el intervalo centrado en el estadístico $\overline{x}$ obtenido en la muestra sería:

$$I.C. = I(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{, para estimar } \mu.$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) tal que $p(|Z|<z_{1-\alpha/2})=1-\alpha$, el error es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, de donde el tamaño n es $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$



- Con *un nivel de confianza 1 – α* = 99%, es decir 1–α = 99% = 0'99, de donde α = 0'01 = 1% como *nivel de significación*.

De la igualdad $p(|Z|<z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$, se deduce que $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.

$p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - (0'01)/2 = 0'995$, mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor más próximo a 0'995 es la mitad de 0'9949 y 0'9951, que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = (2'57+2'58)/2 = 2'575$.

Me piden el tamaño de la muestra es: $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'575\cdot 6}{2}\right)^2 \cong 59'675$, por tanto **el tamaño mínimo de la muestra es** n = 60.