Modelo nº 2 Sept. Sobrantes de 2007-2008 Soluciones

Instrucciones:
a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
d) Puede usar una calculadora no programable y no gráfica.
e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

a) (1'5 puntos) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por: $\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) (1'5 puntos) Calcule la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

a)

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por: $\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, operando queda $\begin{pmatrix} 9x+2y+3 \\ 3x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$. Igualando tenemos:

9x+2y+3 = 5
3x-y = 4, de donde y = 3x-4, y entrando en la 1ª ecuación tenemos:

9x+2(3x-4)+3 = 5 $\rightarrow$ 15x – 5 = 5 $\rightarrow$ 15x = 10 $\rightarrow$ **x = 10/15 = 2/3**, de donde **y** = 3(2/3)-4 **= -2.**
La solución del sistema es (x,y) = (2/3, -2).

b)

Calcule la matriz inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Sabemos que si mediante transformaciones elementales podemos pasar de $(A|I_3)$ a $(I_3|B)$, la matriz B es la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_3+F_1(-1)} \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_3+F_2(-2)} \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)_{F_3(-1)} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)^{F_1+F_3(-1)} \approx \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2 (A)

a) (1'5 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = 3/x en el punto de abscisa x = - 1
b) (1'5 puntos) Halle los valores de *a* y *b* para que la función g(x) = ax + b/x tenga un extremo relativo en el punto (1,2).

Solución

a)
Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) = 3/x en el punto de abscisa x = - 1
La recta tangente en x = -1 es "y – f(-1) = f'(-1)(x + 1)"

f(x) = 3/x $\rightarrow$ f(-1) = 3/-1 = -3.
f'(x) = $-3/x^2$ $\rightarrow$ f(-1) = $-3/(-1)^2$ = -3.

La recta tangente en x = -1 es "y + 3 = -3.(x + 1)"

b)
Halle los valores de *a* y *b* para que la función g(x) = ax + b/x tenga un extremo relativo en el punto (1,2).

Si g(x) tiene un extremo relativo en el punto (1,2), tenemos f'(1) = 0 (por extremo) y f(1) = 2 (por punto)

g(x) = ax + b/x; g'(x) = a - b/x^2

De f(1) = 2, tenemos 2 = a + b
De f'(1) = 0, tenemos 0 = a – b, de donde a = b, luego 2 = 2a y por tanto **a = 1 = b.**

EJERCICIO 3 (A)

Parte I

El examen de Matemáticas de un alumno consta de dos ejercicios. La probabilidad de que resuelva el primero es del 30%, la de que resuelva ambos es del 10%, y la de que no resuelva ninguno es del 35%. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) (1 punto) Que el alumno resuelva el segundo ejercicio.
b) (1 punto) Que resuelva el segundo ejercicio, sabiendo que no ha resuelto el primero.

Solución

Llamemos A y B a los sucesos "apruebe el 1º" y "apruebe el 2º", respectivamente

De, resuelva el primero es del 30%, tenemos p(A) = 0'30.
De, la de que resuelva ambos es del 10%, tenemos p(A∩B) = 0'10.
De, de que no resuelva ninguno es del 35%, tenemos p(noA y noB) = $p(A^C \cap B^C)$ = 0'35.

Utilizando las leyes de Morgan, $p(A^C \cap B^C) = p((A \cup B)^C)$ = 0'35
Del contrario tengo $((A \cup B)^C)$ = 0'35 = 1 - p(A ∪ B), de donde p(A∪B) = 1 – 0'35 = 0'65.
a)
Que el alumno resuelva el segundo ejercicio.

Me están pidiendo p(B)
Sabemos que p(A∪B) = p(A) + p(B) – p(A∩B), es decir 0'65 = 0'30 + p(B) – 0'10, de donde **p(B) = 0'45**.

b)
Que resuelva el segundo ejercicio, sabiendo que no ha resuelto el primero.

Me están pidiendo **p(B/noA) =** $p(B/A^C) = \frac{p(B \cap A^C)}{p(A^C)} = \frac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)}$ = (0'45-0'10)/(1-0'30) = **0'5.**

EJERCICIO 3 (A)

Parte II

La longitud de los cables de los auriculares que fabrica una empresa es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 4'5 cm. Para estimar la longitud media se han medido los cables de una muestra aleatoria de 9 auriculares y se han obtenido las siguientes longitudes, en cm:

205, 198, 202, 204, 197, 195, 196, 201, 202.

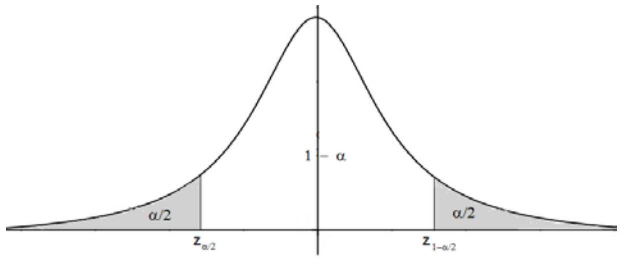
a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la longitud media de los cables.
b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estos auriculares para que el error de estimación de la longitud media sea inferior a 1 cm, con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Sabemos que $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C} = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo es $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$.

a)
Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la longitud media de los cables.

Datos $\sigma = 4'5$; $n = 9$; $1 - \alpha = 97\% = 0'97$; $\overline{x} = (205+198+202+204+197+195+196+201+202)/9 = 200$.

De $1 - \alpha = 0'97$, tenemos $\alpha = 1 - 0'97 = 0'03$, de donde $\alpha/2 = 0'03/2 = 0'015$

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'985 vemos que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'985} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C} = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left(200 - 2'17 \cdot \frac{4'5}{\sqrt{9}}, 200 + 2'17 \cdot \frac{4'5}{\sqrt{9}} \right) = (196'745; 203'255)$$

b)
Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estos auriculares para que el error de estimación de la longitud media sea inferior a 1 cm, con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

Datos $E = 1$, $1 - \alpha = 0'97$ de donde $z_{1-\alpha/2} = 2'17$; $\sigma = 4'5$

El tamaño mínimo es $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2'17 \cdot 4'5}{1} \right)^2 \cong 95'355$, luego **el tamaño mínimo es n = 96**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (B)

(3 puntos) Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.
Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

Solución

Leyendo despacio el problema podemos obtener la siguiente tabla. Primero nos fijamos a que llamamos “x” e “y”, después ponemos la función objetivo y por último indicamos las restricciones.

	Pildora “P”	Pildora “Q”	Restricciones	
Nº de pildoras	x	y	$x \ge 0$; $y \ge 0$	
Hierro	40x	10y	$40x+10y \le 240$	
Vitamina B	20x	20y	$10x+20y \le 200$	
Coste			F(x,y)=0’06x+0’08y	Maximizar

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones (restricciones):

$40x+10y \le 240$; $10x+20y \le 200$; $x \ge 0$; $y \ge 0$. Simplificando

$4x+y \le 24$; $x+2y \le 20$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

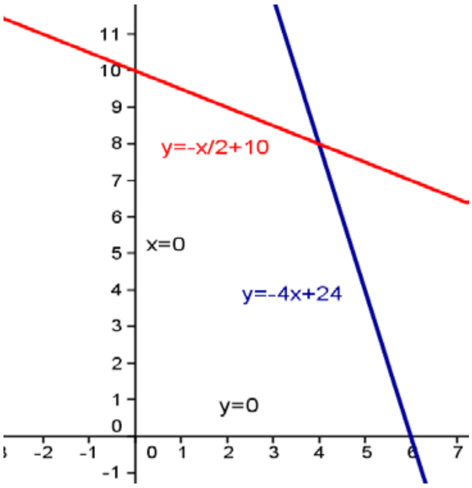
La función beneficio es F(x,y) = 0'06x + 0'08y

Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y", para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible.

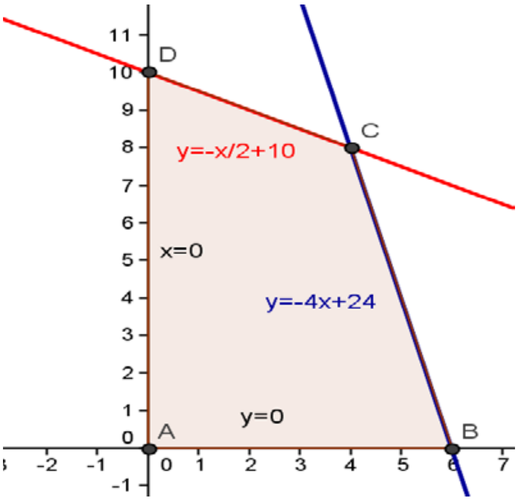
Inecuaciones : $4x+y \le 24$; $x+2y \le 20$; $x \ge 0$; $y \ge 0$

Rectas: y = -4x + 24; y = -x/2 + 10; x = 0 (eje OY), y = 0 (eje OX)

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades "$y \le -4x + 24$; $y \le -x/2 + 10$; $x \ge 0$, $y \ge 0$", vemos que el recinto factible, y los vértices A, C, C y D de dicha región son:



De x= 0 e y=0, tenemos el punto de corte A(0,0)
De y= 0 e y=-4x+24, tenemos el punto de corte B(6,0)
De y= -x/2+10 e y = -4x+24, tenemos -x+20 = -8x+48, de donde 7x = 28, luego x = 4 e y = 8, el punto de corte es C(4,8).
De x= 0 e y=-x/2 + 10, tenemos el punto de corte D(0,10)

El recinto tiene por vértices A(0,0), B(6,0), C(4,8) y D(0,10).

Consideremos la función beneficio F(x,y) = 0'06x + 0'08y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(x,y) = 0’06(0) + 0’08(0) = 0, F(x,y) = 0’06(6) + 0’08(0) = 0’36;
F(x,y) = 0’06(4) + 0’08(8) = 0’88, F(x,y) = 0’06(0) + 0’08(10) = 0’8.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es** 0’88 (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el punto (4,8).**

El mayor beneficio es **0’88 € y se obtiene elaborando 4 píldoras del tipo P y 8 píldoras del tipo Q.**

EJERCICIO 2

Dada la función f(x) = 4 – 3x^2 + x^3, determine:
a) (1’5 puntos) La monotonía y la curvatura de *f* .
b) (0’5 puntos) Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.
c) (1 punto) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = - 1

Solución

Dada la función f(x) = 4 – 3x^2 + x^3, determine:
a) y b)
La monotonía es el estudio de la 1ª derivada (nos saldrán los extremos relativos), y la curvatura es el estudio de la 3 derivada (nos saldrán los puntos de inflexión).

Estudio de f’(x). Monotonía
f(x) = 4 – 3x^2 + x^3
f’(x) = -6x + 3x^2 = x(-6 + 3x).
De f’(x) = 0 $\rightarrow$ x(-6 + 3x) = 0, de donde **x = 0** y **x = 2** (posibles extremos)

Como f ‘(-1) = -1(-3) = 3 > 0, **f es estrictamente creciente en (-∞,0)**
Como f ‘(1) = 1(-3) = -3 < 0, **f es estrictamente decreciente en (0,3)**
Como f ‘(3) = 3(3) = 9 > 0, **f es estrictamente creciente en (3,∞)**

Por definición, **x = 0 es un máximo relativo y vale f(0) = 4**
Por definición, **x = 2 es un mínimo relativo y vale f(2) = 4-12+8 = 0**

Estudio de f’’(x). Curvatura
f(x) = 4 – 3x^2 + x^3
f’(x) = -6x + 3x^2.
f’’(x) = -6 + 6x.
De f’’(x) = 0 $\rightarrow$ -6 + 6x = 0, de donde **x = 1** (posible punto de inflexión)

Como f ‘’(0) = -6 < 0, **f es cóncava (∩) en (-∞,1)**
Como f ‘(2) = -6 + 12 = 6 > 0, **f es convexa (∪) en (1,∞)**

Por definición, x = 1 es punto de inflexión y vale f(1) = 2
c)
La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa x = - 1

La recta tangente en x = -1 es “y – f(-1) = f’(-1)(x + 1)”

De f(x) = 4 – 3x^2 + x^3 $\rightarrow$ f(-1) = 4 – 3(-1)^2 + (-1)^3 = 0.
De f’(x) = -6x + 3x^2 $\rightarrow$ f’(-1) = 6 + 3(-1)^2 = 9.

La recta tangente pedida es “y – 0 = 9(x + 1)”

EJERCICIO 3 (B)

Parte I
Se consideran los sucesos *A* y *B*.
a) (0’75 puntos) Exprese, utilizando las operaciones con sucesos, los siguientes sucesos:
1. Que no ocurra ninguno de los dos.
2. Que ocurra al menos uno de los dos.
3. Que ocurra *B*, pero que no ocurra *A*.
b) (1’25 puntos) Sabiendo que p(A) = 0’5, p(B) = 0’5 y p(A/B) = 0’3, halle p(AUB)

Solución

Se consideran los sucesos *A* y *B*.

a)

Exprese, utilizando las operaciones con sucesos, los siguientes sucesos:

1. Que no ocurra ninguno de los dos. $\rightarrow$ Me están pidiendo **(noA y noB) = ($A^C \cap B^C$)**
2. Que ocurra al menos uno de los dos. $\rightarrow$ Me están pidiendo **(A ó B) = ($A \cup B$)**
3. Que ocurra *B*, pero que no ocurra *A*. Me están pidiendo **(B y noA) = ($B \cap A^C$)**

b)

Sabiendo que p(A) = 0'5, p(B) = 0'5 y p(A/B) = 0'3, halle p(AUB)

Me están pidiendo $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'5 + 0'5 - p(A\cap B)$**.**

De p(A/B) = 0'3, tengo 0'3 = $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ **=** $\dfrac{p(A \cap B)}{0'5}$, de donde $p(A\cap B) = 0'3.0'5 = 0'15$, por tanto:

$p(A\cup B) = 0'5 + 0'5 - 0'15 = 0'85$

EJERCICIO 3 (B)

Parte II

(2 puntos) Se ha aplicado un medicamento a una muestra de 200 enfermos y se ha observado una respuesta positiva en 140 de ellos. Estímese, mediante un intervalo de confianza del 99%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se aplicase a la población de la que se ha extraído la muestra.

Solución

Calcule un intervalo de confianza, al 99%, para estimar la proporción de enfermos que responderían positivamente a este medicamento

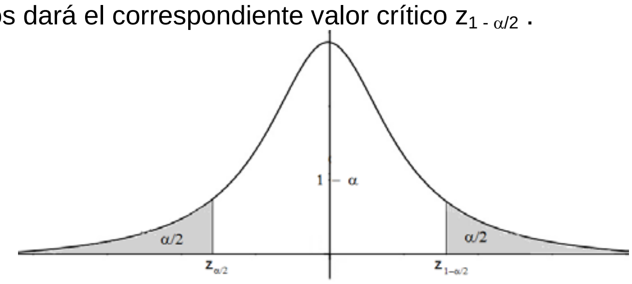
Para construir el intervalo:

- Se elige un *estimador* del parámetro que se desea estimar ($\overline{X}$ para **μ**, y $\hat{p}$ para **p**), en nuestro caso es de proporción luego es $\hat{p} = \dfrac{140}{200}$ = 0'7, luego 1 - $\hat{p}$ = 0'3
- Se elige *un nivel de confianza 1 – α* con el que se desea construir el intervalo, que nos lo dan y es del 99%, es decir 1 – α = 99% = 0'99, de donde α = 0'01 = 1% como *nivel de significación*.
- El intervalo centrado en el estadístico $\hat{p}$ obtenido en la muestra que sería:

$$\text{I.C.} = I(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \text{ para estimar } \mathbf{p}$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ tal que $p(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2})$= = 1 - α.

De esa igualdad, $p(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$, se deduce que $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.



$p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01/2 = 0'995$, mirando en la tabla de la N(0,1). Vemos que el valor más próximo a 0'995 es la mitad entre 0'9949 y 0'9951, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57+2'58)/2 = 2'575. Por tanto **el intervalo de confianza pedido es**

$$\textbf{I.C. = I(p) =} \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0'7 - 2'575.\sqrt{\frac{0'7.0'3}{200}}, 0'7 + 2'575.\sqrt{\frac{0'7.0'3}{200}}\right) \cong$$

$\cong$ (0'7 – 0'08344 ; 0'7 – 0'08344) = **(0'61656; 0'78344)**