SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2008 (MODELO 3)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1'5 puntos) Calcule los valores de *a* y *b* para que A·B = B·A

b) (1'5 puntos) Para *a* = 1 y *b* = 0, resuelva la ecuación matricial X·B – A = I_2.

Solución

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

(a) (1'5 puntos) Calcule los valores de *a* y *b* para que A·B = B·A

De A·B = B·A tenemos $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

Igualando miembro a miembro tenemos:

$12 = 3b \rightarrow b = 4$

$2 = 2a \rightarrow a = 1$

$3a = 3 \rightarrow a = 1$

$3b = 12 \rightarrow b = 4$

Luego a = 1 y b = 4.

(b)

Para *a* = 1 y *b* = 0, resuelva la ecuación matricial X·B – A = I_2.

Para *a* = 1 y *b* = 0 tenemos $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$

Si la matriz B tiene matriz inversa B^{-1}, (podemos pasar de $(B|I_2)$ mediante transformaciones elementales a $(I_2|B^{-1})$), podemos multiplicar la expresión matricial X·B – A = I_2 por la derecha por la matriz B^{-1}.

De $X\cdot B - A = I_2$, tenemos $X\cdot B\cdot B^{-1} - A\cdot B^{-1} = I_2\cdot B^{-1} \rightarrow X\cdot I_2 - A\cdot B^{-1} = B^{-1} \rightarrow X = A\cdot B^{-1} + B^{-1}$

$(B|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2 - 6\cdot F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \end{array}\right) = (I_2|B^{-1})$, por tanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$.

Luego **X =** $A\cdot B^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2_A

Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x^2-10x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) (0'5 puntos) Halle el dominio de *f*.

b) (1'25 puntos) Estudie la derivabilidad de *f* en *x* = 2.

c) (1'25 puntos) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0.

Solución

(a)

Halle el dominio de *f*.

Si x < 2, $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ y su dominio es R – {1}, en particular su dominio es (x < 2) – {1}

Si x ≥ 2, $f(x) = 2x^2 - 10x$ que es un polinomio y su dominio es R, en particular su dominio es (x ≥ 2).

Por tanto el dominio de f es R – {1}.

(b)

Estudie la derivabilidad de *f* en *x* = 2.

Sabemos que si f es derivable en x = 2, f es continua en x = 2. Estudiamos primero la continuidad.

f es continua en x = 2, si $f(2) = \lim_{x\rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x\rightarrow 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x\rightarrow 2^+} (2x^2 - 10x) = -12$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \dfrac{2x}{x-1} = 4/1 = 4.$

Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ **$-12 \neq 4$** $= \lim_{x\to 2^-} f(x)$, **f no es continua en x = 2, por tanto tampoco es derivable en x = 2.**

c)
Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0.

El punto x = 0 está en la rama x < 2, donde $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

La ecuación de la recta tangente en x = 0 es " y – f(0) = f'(0)·(x – 0)".

De $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, tenemos f(0) = 0.

De $f'(x) = \dfrac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$, tenemos $f'(0) = -2/(-1)^2 = -2$.

Luego la recta tangente en x = 0 es " y – 0 = -2·(x – 0)", es decir y = -2x.

EJERCICIO 3_A

Parte I

a) (1 punto) Sean *A* y *B* dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que *P*(*A*)=0'5, que *P*(*B*)=0'4 y que p(AUB) = 0'8, determine p(A/B)
b) (1 punto) Sean *C* y *D* dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que p(C)=0'3, que p(D)=0'8 y que son independientes, determine p(CUD)

Solución

(a)
Sean *A* y *B* dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que *p*(*A*) = 0'5, que *p*(*B*) = 0'4 y que p(AUB) = 0'8, determine p(A/B)

Sabemos que **p(A/B) =** $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ = {**} = 0'1/0'4 **= 0'25**.

{**}, de $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ tenemos $p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A\cup B) = 0'5 + 0'4 – 0'8 = 0'1$

(b)
Sean *C* y *D* dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que p(C)=0'3, que p(D)=0'8 y que son independientes, determine p(CUD)

Como C y D son independientes tenemos p(C)·p(D) = **p(C∩D)** = 0'3·0'8 **= 0'24.**

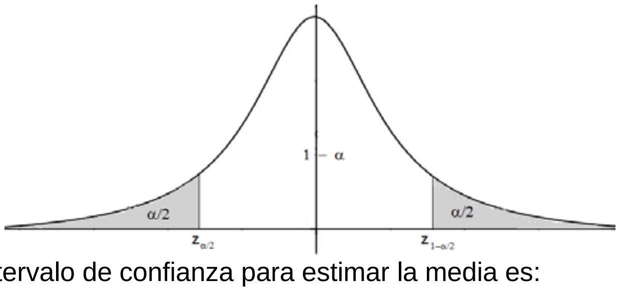
EJERCICIO 3_A

El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media **μ** días y desviación típica 3 días.
a) (1 punto) Determine un intervalo de confianza para estimar **μ**, a un nivel del 97%, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8'1 días.
b) (1 punto) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar **μ** con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92%?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.
a)
Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97%, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8’1 días.

Datos del problema: $\sigma = 3$; $n = 100$; $\overline{x} = 8'1$; nivel de confianza = 97% = 0’97 = 1 - α, de donde α=0’03, con la cual $\alpha/2 = 0'015$

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’985 vemos que está y corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(8'1 - 2'17\cdot\frac{3}{\sqrt{100}}, 8'1 + 2'17\cdot\frac{3}{\sqrt{100}}\right)$ **= (7’449, 8’751)**

b)
¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92%?

Datos del problema: $\sigma = 3$; error = E < 1; nivel de confianza = 92%.
De nivel de confianza = 92% = 0’92 = 1 - α, de donde α=0’08, con la cual $\alpha/2 = 0'04$

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’96 vemos que no está y el valor más próximo es 0’9599 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'75$.

Sabemos que donde el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 > \left(\frac{1'75\cdot 3}{1}\right)^2 \cong 27'56$, **luego el tamaño mínimo es n = 28.**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (2 puntos) Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \le 6; \quad 4x + y \le 10; \quad -x + y \le 3; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0$$

y determine sus vértices.
b) (1 punto) Calcule el máximo de la función f(x,y) = 4x + 2y – 3 en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

Solución

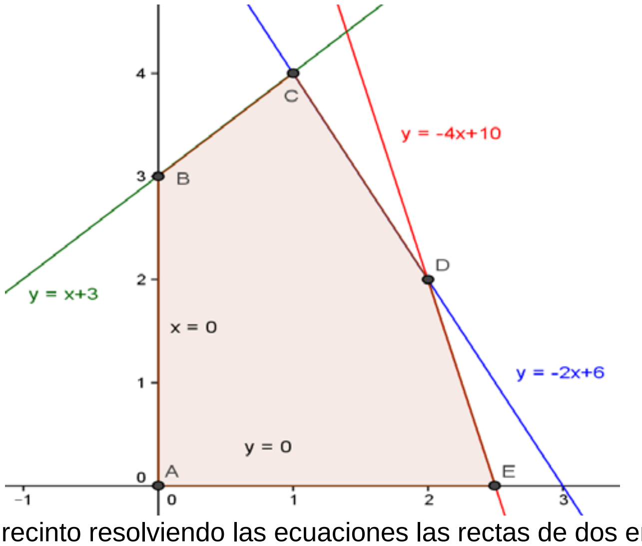
(a)
Represente la región definida por las siguientes inecuaciones $2x + y\le 6$; $4x + y\le10$; $- x + y\le 3$; $x\ge 0$; $y\ge 0$ y determine sus vértices.

Las desigualdades $2x + y \le 6$; $4x + y \le 10$; $- x + y \le 3$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $2x + y = 6$; $4x + y = 10$; $- x + y = 3$; $x = 0$; $y = 0$
.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las “y” y tenemos

$$y = -2x + 6; \quad y = -4x + 10; \quad y = x + 3; \quad x = 0; \quad y = 0.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0; tenemos **el punto de corte es A(0,0)**

De x = 0 e y = x + 3; tenemos **el punto de corte es B(0,3)**

De y = x + 3 e y = -2x + 6; tenemos x + 3 = -2x + 6, de donde “3x = 3”, de donde “x = 1” e “y = 4”, y **el punto de corte es C(1,4)**

De y = -4x + 10 e y = -2x + 6; tenemos -4x + 10 = -2x + 6, de donde “4 = 2x”, de donde “x = 2” e “y = 2”, y **el punto de corte es D(2,2)**

De y = -4x + 10 e y = 0; tenemos -4x + 10 = 0, de donde “10 = 4x”, de donde “x = 2’5” e “y = 0”, y **el punto de corte es E(2’5,0)**

Fijándonos en la resolución de las ecuaciones, **los vértices del recinto son: A(0,0); B(0,3); C(1,4); D(2,2) y el E(2’5,0).**

b)

Calcule el máximo de la función f(x,y) = 4x + 2y – 3 en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en alguno de los vértices del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(-2,-4); B(-1,3) y el C(3,-1).

F(0,0) = 4(0) + 2(0) – 3 = -3, F(0,3) = 4(0) + 2(3) – 3 = 3, **F(1,4) =** 4(1) + 2(4) – 3 **= 9**
F(2,2) = 4(2) + 2(2) – 3 = **9**, F(3,-1) = 4(2’5) + 2(0) – 3 = 7

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 9 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el segmento determinado por los vértices C(1,4) y D(2,2).

EJERCICIO 2_B

Sea la función *f* definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<1 \\ L(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

a) (1’5 puntos) Determine *a* y *b* sabiendo que *f* es continua y tiene un mínimo en x = -1

b) (1’5 puntos) Para a = -1 y b = 1, estudie la derivabilidad de f en x = -1 y x = 1.

Solución

(a)

Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.

Como f es continua en R, f es continua en x = 1, tenemos $f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$.

$f(1) = \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} L(x) = L(1) = 0$.

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x^2+ax+b) = 1+a+b$.

Como f es continua en “x = 1”, tenemos **0 = 1+a+b**.

Como dicen que tiene un mínimo en x = -1, tenemos f'(-1) = 0

Vemos que x = -1 está en x < 1, donde f(x) = x^2 + ax + b, por tanto f'(x) = 2x + a.
De f'(1) = 0 tenemos 2(-1) + a = 0, de donde **a = 2**.
Entrando con a = -1 en **0 = 1+a+b**, tenemos 0 = 1+a+b, de donde **b = -3**.
Los valores pedidos son a = 2 y b = -3.

b)
Para a = -1 y b = 1, estudie la derivabilidad de f en x = -1 y x = 1.

Hemos visto que f es continua en x = 1 si a **= 2 y b = -3**, por tanto **para a = -1 y b = 1 la función no es continua en x = 1, y por tanto f no es derivable en x = 1.**

Vemos que x = -1 está en x < 1, donde f(x) = x^2 - x + 1, por tanto f'(x) = 2x - 1.
Por tanto f'(-1) = 2(-1) – 1 = 1.

EJERCICIO 3_B

Parte I

Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.
b) (1 punto) Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

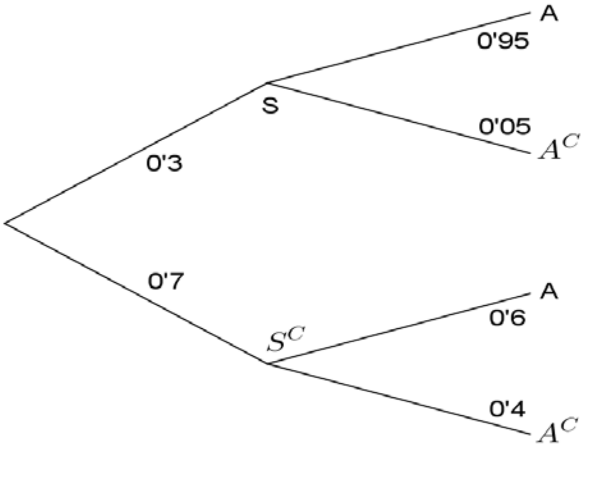
Solución

Se sabe que el 30% de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95% tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60% tiene empleo.
a)
Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

Llamemos S**,** S^C, A y A^C, a los sucesos siguientes, "tener estudios superiores", "no tener estudios superiores", " tener empleo " y " no tener empleo ", respectivamente.

Además tenemos p(S) = 30% = 0'3, p(A/S) = 95% = 0'95, p(A/S^C) = 60% = 0'60

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



(a)
Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcule la probabilidad de que esté en paro.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída sea negra (N) es:

p(en paro) = p(A^C) = p(S).p(A^C/S) + p(S^C).p(A^C/ S^C) = 0'3·0'05 + 0'7·0'4 = **0'295.**

(b)
Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\textbf{p(S/A) =} \frac{p(S\cap A)}{p(A)} = \frac{p(S).p(A/S)}{1 - p(A^C)} = \frac{0'3\cdot 0'95}{1 - 0'295} \cong \textbf{0'4043}.$$

EJERCICIO 3_B

Parte II

Sea la población {1,2,3,4}.
a) (1 punto) Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.
b) (1 punto) Calcule la varianza de las medias muestrales.

Solución

(a) y (b)
A partir de una población de elementos 1, 2, 3, 4 se seleccionan, mediante muestreo aleatorio simple, todas las muestras de tamaño 2.
Escriba dichas muestras y calcule la varianza de las medias muestrales.

Construyamos la distribución muestral de medias y, para ello, calculamos la media de todas las muestras posibles con reemplazamiento de tamaño 2 que son 16. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

MUESTRAS																
Elementos	1 1	1 2	1 3	1 4	2 1	2 2	2 3	2 4	3 1	3 2	3 3	3 4	4 1	4 2	4 3	4 4
Media de la muestra $\overline{x}_i$	1	1'5	2	2'5	1'5	2	2'5	3	2	2'5	3	3'5	2'5	3	3'5	4

(b)
La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \,.\, x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
1	1	1	1
1'5	2	3	4'5
2	3	6	12
2'5	4	10	25
3	3	9	27
3'5	2	7	24'5
4	1	4	16
$\sum$	**N=16**	**40**	**110**

La media de la distribución muestral de medias (media de las medias muestrales) es:

$$\mu = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{40}{16} = 5/2$$

La desviación típica de la distribución muestral de medias es:

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \frac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{110}{16} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{8} \textbf{ = 0'625.}$$