# SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2008 (MODELO 4)

## OPCIÓN A

### EJERCICIO 1_A

(3 puntos) Un joyero fabrica dos modelos de anillos. El modelo A se hace con 1 gramo de oro y 1'5 gramos de plata. El modelo B lleva 1'5 gramos de oro y 1 gramo de plata.
El joyero sólo dispone de 750 gramos de cada metal y piensa fabricar, al menos, 150 anillos del tipo B que ya tiene encargados. Sabiendo que el beneficio de un anillo del tipo A es de 50 € y del tipo B es de 70 €, ¿cuántos anillos ha de fabricar de cada tipo para obtener el beneficio máximo y cuál será éste?

**Solución**

Llamamos "x" al número de unidades del anillo del tipo A.
Llamamos "y" al número de unidades del anillo del tipo B.
Para determinar las inecuaciones y la función Beneficio F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

| | Modelo A | Modelo B | Total |
|---|---|---|---|
| Oro | 1 | 1'5 | 750 gr |
| Plata | 1'5 | 1 | 750 gr |
| Pedido mínimo | | 150 | |
| Beneficio | 50 € | 70 € | 50x+70y |

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones:

$$x+1'5y \le 750;\ \ 1'5x + y \le 750;\ x \ge 0;\ \ y \ge 150;$$

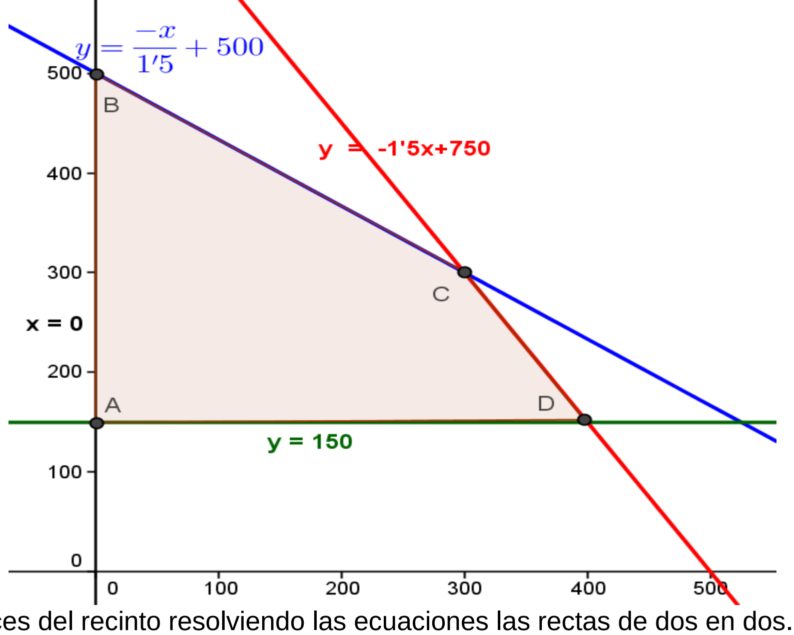
La función beneficio es B(x,y) = F(x,y) = 50x + 70y

Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible.

Inecuaciones : $x+1'5y \le 750;\ \ 1'5x + y \le 750;\ x \ge 0;\ \ y \ge 150$

Rectas: 0 x+1'5y = 750; 1'5x + y = 750; x = 0; y = 150. Despejamos "y" para dibujar mejor las rectas (con dos puntos es suficiente para cada una de ellas), y = -x/(1'5) + 500; y = -1'5x + 750; x = 0; y = 150

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.




Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De x = 0 e y = 150; tenemos **el punto de corte es A(0,150)**

De x = 0 e y = -x/(1'5) + 500; tenemos **el punto de corte es B(0,500)**

De y = -x/(1'5) + 500 e y = -1'5x + 750; tenemos -x/(1'5) + 500 = -1'5x + 750, de donde "-x + 750 = -2'25x

+ 1125", es decir sale "1'25x = 375", luego "x = 300" e "y = 300", y **el punto de corte es C(300,300)**

De y = 150 e y = -1'5x + 750; tenemos 150 = -1'5x + 750, de donde "1'5x = 600", luego "x = 400" e "y = 150", y **el punto de corte es D(400,150)**

Vemos que **los vértices del recinto son: A(0,150); B(0,500); C(300,300) y D(400,150).**

Calculemos los valores máximo y mínimo de la función F(x,y) = 50x + 70y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,150); B(0,500); C(300,300) y D(400,150).

F(0,150) = 50(0) + 70(150) = 10500; F(0,500) = 50(0) + 70(500) = 35000**;**
**F(300,300) = 50(300) + 70(300) = 36000**; F(400,150) = 50(400) + 70(150) = 30500**;**

**Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 36000 € (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice C(300,300), es decir el beneficio máximo es de 36000 € y se obtiene haciendo 300 anillos del tipo A y 300 anillos del tipo B.**

## EJERCICIO 2_A

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función $B(x) = -3x^2 + 120x + 675$, $x \geq 0$, donde *x* representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
a) (0'75 puntos) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
b) (0'75 puntos) Calcule el valor de *x* que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?
c) (0'75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.
d) (0'75 puntos) Represente gráficamente la función *B*.

**Solución**

Beneficio $B(x) = -3x^2 + 120x + 675$, $x \geq 0$, donde *x* representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
(a)
Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.

Sabemos que la gráfica de B(x) es una parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$). Por tanto nos están pidiendo las soluciones (positivas) de B(x) = 0.

De $-3x^2 + 120x + 675 = 0$, tenemos $3x^2 - 120x - 675 = 0$, luego $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$

$\dfrac{120 \pm \sqrt{14400 + 8100}}{6} = \dfrac{120 \pm \sqrt{22500}}{6} = \dfrac{120 \pm 150}{6}$, de donde $x_1 = (120+150)/6 = 45$ y $x_2=(120-150)/6=$ $= -5$. **Sólo es válida x = 45**, pues la otra es negativa.

**La empresa no obtiene beneficios para el coste de 45000 €**
(b)
Calcule el valor de *x* que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?

Sabemos que la gráfica de B(x) es una parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), y el máximo es la solución de la ecuación B'(x) = 0.

$B(x) = -3x^2 + 120x + 675 \rightarrow B'(x) = -6x + 120$

De B'(x) = 0, tenemos $-6x + 120$, es decir $x = 20$ y $B(x) = -3(20)^2 + 120(20) + 675 = 1875$.
**El máximo beneficio es de 1875000 € y se obtiene para un coste de 20000 €**
(c)
Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.

Nos están pidiendo el estudio de la primera derivada B'(x). (recordamos que $x \geq 0$)

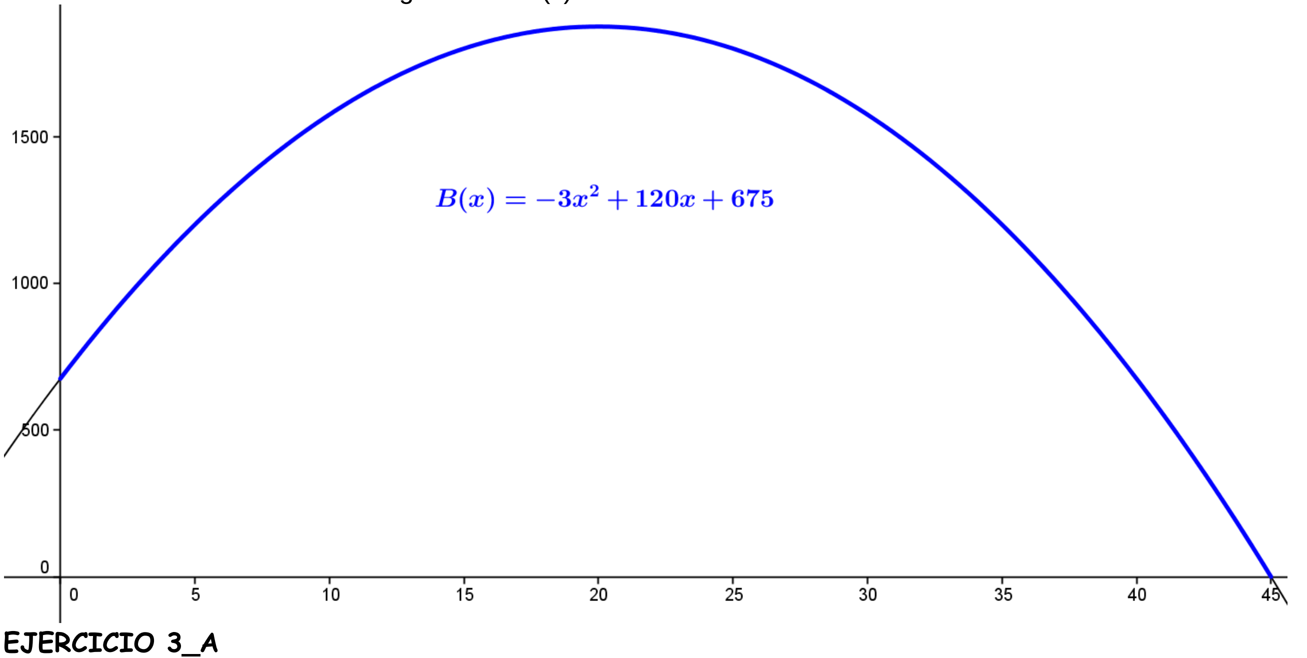
Hemos visto que la solución de $B'(x) = -6x + 120 = 0$ es $x = 20$.

Como B'(1) = 114 > 0, B(x) es creciente en (0,20). Es decir crece desde coste 0 € hasta 20000 €.0
Como B'(25) = -30 < 0, B(x) es decreciente en (20,45). Es decir decrece desde coste 20000€ hasta 45000 €.

(d)

Represente gráficamente la función *B*.

Ya hemos dicho que la gráfica de B(x) es una parábola con las ramas hacia abajo (∩). Su vértice ya lo hemos calculado, era el máximo, es decir el punto V(20, 1875). Los cortes son (0,675), (-5,0) y (45,0).
Con estos datos un esbozo de la gráfica de B(x) es:




**EJERCICIO 3_A**

*Parte I*

En una población, donde el 45% son hombres y el resto mujeres, se sabe que el 10% de los hombres y el 8% de las mujeres son inmigrantes.
a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de inmigrantes hay en esta población?
b) (1 punto) Si se elige, al azar, un inmigrante de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

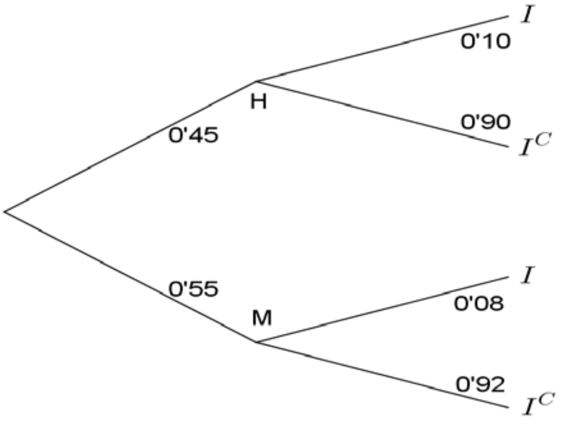
**Solución**

En una población, donde el 45% son hombres y el resto mujeres, se sabe que el 10% de los hombres y el 8% de las mujeres son inmigrantes.
a)
¿Qué porcentaje de inmigrantes hay en esta población?

Llamemos H, M, I y $I^C$, a los sucesos siguientes, “hombres”, "mujeres", "inmigrantes" y "no inmigrantes", respectivamente.

Además tenemos p(H) = 45% = 0’45, p(I/H) = 10% = 0’10, p(I/M) = 8% = 0’08

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).




(a)
¿Qué porcentaje de inmigrantes hay en esta población?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída sea negra (N) es:

**p(inmigrante) = p(I) =** p(H).p(I/H) + p(M).p(I/M) = 0’45·0’10 + 0’55·0’08 = **0’089.**

(b)
Si se elige, al azar, un inmigrante de esta población, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

**Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:**

$$\textbf{p(H/I)} = \frac{p(H\cap I)}{p(I)} = \frac{p(H).p(I/H)}{p(I)} = \frac{0'45\cdot 0'10}{0'089} \cong \mathbf{0'5056}.$$

**EJERCICIO 3_A**

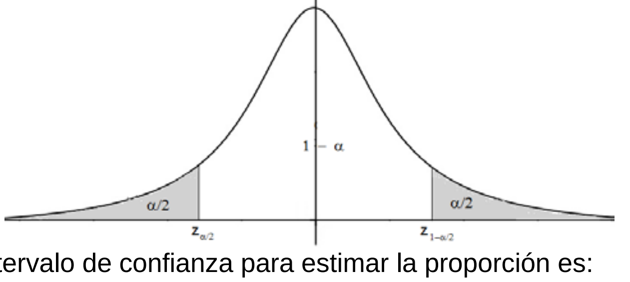
*Parte II*

(2 puntos) Tomada al azar una muestra de 90 alumnos de un Instituto se encontró que un tercio habla inglés.
Halle, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos de ese Instituto que habla inglés.

**Solución**

- Para la proporción muestral $\mathbf{p_0}$ utilizaremos el **estimador** PROPORCIÓN MUESTRAL **p**, que sabemos sigue una N(**p**, $\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$), es decir: $\mathbf{p} \approx N(p_0, \sqrt{\frac{p_0\cdot q_0}{n}})$, donde $\mathbf{q_0} = \mathbf{1- p_0}$

(Se considerarán las muestras de tamaño n ≥ 30 para poder aplicar el Teorema Central del Límite y asegurar la distribución anterior).




También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$I(\mathbf{p}) = \left(p_0 - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_0\cdot q_0}{n}}, p_0 + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_0\cdot q_0}{n}}\right) \text{ para estimar } \mathbf{p}$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

Tomada al azar una muestra de 90 alumnos de un Instituto se encontró que un tercio habla inglés.
Halle, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos de ese Instituto que habla inglés.

Datos del problema: $p_0 = 1/3$; $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 1/3 = 2/3$; n = 90; nivel de confianza = 97% = 0’97 = 1 - α, de donde α=0’03, con la cual α/2 = 0’015

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'015 = 0'985$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’985 vemos que está en las tablas y corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'17$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I(\mathbf{p}) = \left(p_0 - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_0\cdot q_0}{n}}, p_0 + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_0\cdot q_0}{n}}\right) = \left(1/3 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{(1/3)\cdot(2/3)}{90}}, 1/3 + 2'17\cdot\sqrt{\frac{(1/3)\cdot(2/3)}{90}}\right) =$$

**= (0’146569, 0’520097).**

## OPCIÓN B

**EJERCICIO 1_B**

a) **(1 punto)** Dadas las matrices F = (2 -1 3) y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule los productos C.F y F.C

b) **(2 puntos)** Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz *X* que verifique la ecuación $X.A^{-1} - B = C$

**Solución**

a) **(1 punto)** Dadas las matrices F = (2 -1 3) y C = $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcule los productos C.F y F.C

Tenemos que C·F = $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}\cdot(2\ \ -1\ \ 3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 10 & -5 & 15 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Tenemos que F·C = $(2\ \ -1\ \ 3)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (-9)$

b)
Dadas las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcule la matriz *X* que verifique la ecuación
$X.A^{-1} - B = C$

Si la matriz A tiene matriz inversa $A^{-1}$, (podemos pasar de $(A|I_2)$ mediante transformaciones elementales a $(I_2|A^{-1})$ ), podemos multiplicar la expresión matricial $X.A^{-1} - B = C$ por la derecha por la matriz A.

De $X.A^{-1} - B = C$, tenemos $X.A^{-1}\cdot A - B\cdot A = C\cdot A \rightarrow X.I_2 - B\cdot A = CA \rightarrow X = B\cdot A + C\cdot A$

Luego **X =** B·A + C·A = $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

**EJERCICIO 2_B**

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:
a) (0'75 puntos) $f(x) = (x^3 + 1).e^{7x}$.
b) (0'75 puntos) $g(x) = 3^x.L(x)$.
c) (0'75 puntos) $h(x) = (x^2 + 1).(x^5 - 6x)^6$
d) (0'75 puntos) $i(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - 2}$

**Solución**

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = (x^3 + 1).e^{7x};\quad g(x) = 3^x.L(x);\quad h(x) = (x^2 + 1).(x^5 - 6x)^6;\quad i(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 2}$$

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación.

$( f(x)+g(x) )' = f'(x)+g'(x)$; $( f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$;

$( (f(x)^k )' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$; $( a^x)' = a^x.\ln(a)$; $( e^{kx})' = k.e^{kx}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$; $(k)' = 0$.

(a)
$f(x) = (x^3 + 1).e^{7x}$
$f'(x) = 3x^2\cdot e^{7x} + (x^3 + 1)\cdot 7\cdot e^{7x} = e^{7x}\cdot(7x^3 + 3x^2 + 7)$.

(b)
$g(x) = 3^x.L(x)$.
$g'(x) = 3^x\cdot L(3)\cdot L(x) + 3^x\cdot(1/x) = 3^x\cdot( L(3)\cdot L(x) + (1/x) )$

(c)
$h(x) = (x^2 + 1).(x^5 - 6x)^6$
$h'(x) = 2x\cdot(x^5 - 6x)^6 + (x^2 + 1)\cdot 6\cdot(x^5 - 6x)^5\cdot( 5x^4 - 6)$

(d)
$i(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2 - 2}$

$i'(x) = \dfrac{2\cdot(x + 1)\cdot(x^2 - 2) - (x + 1)^2\cdot 2x}{(x^2 - 2)^2}$

## EJERCICIO 3_B

*ParteI*

Una caja contiene 12 bombillas, de las cuales 4 están fundidas. Se eligen, al azar y sin reemplazamiento, tres bombillas de esa caja.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ninguna de las tres bombillas esté fundida.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que las tres bombillas estén fundidas.

**Solución**

Una caja contiene 12 bombillas, de las cuales 4 están fundidas. Se eligen, al azar y sin reemplazamiento, tres bombillas de esa caja.
(a)
Calcule la probabilidad de que ninguna de las tres bombillas esté fundida.

Sean $A_1$ , $A_2$ y $A_3$, los sucesos “sacar bombilla fundida la 1ª vez”, “sacar bombilla fundida la 2ª vez” y “sacar bombilla fundida la 3ª vez”.

Como es sin reemplazamiento, no se devuelve, luego disminuye el número cada vez en los sucesos favorables y en los sucesos posibles, a la hora de aplicar la Regla de Laplace.

Tenemos $p(A_1) = 4/12$, $p(A_2/A_1) = 3/11$ y $p(A_3/A_1\cap A) = 2/10$.
Además tenemos que $p(A_1^C) = 8/12$, $p(A_2^C/A_1^C) = 7/11$ y $p(A_3^C/A_1^C\cap A_2) = 6/10$

**p(ninguna de las tres bombillas esté fundida)**$= p(A_1^C\cap A_2^C\cap A_3^C)= p(A_1^C)\cdot p(A_2^C/A_1^C)\cdot p(A_3^C/A_1^C\cap A_2^C) =$
$= (8/12)\cdot(7/11)\cdot(6/10)$ **= 14/55**

(b)
Calcule la probabilidad de que las tres bombillas estén fundidas.

**p(las tres bombillas estén fundidas)** $= p(A_1\cap A_2\cap A_3) = p(A_1)\cdot p(A_2/A_1)\cdot p(A_3/A_1\cap A) = (4/12)\cdot(3/11)\cdot(2/10) =$
**= 1/55.**

## EJERCICIO 3_B

*Parte II*

El tiempo de utilización diaria de ordenador entre los empleados de una empresa sigue una distribución Normal de media **μ** y desviación típica 1’2 horas.
a) (1’25 puntos) Una muestra aleatoria de 40 empleados tiene una media del tiempo de utilización de 2’85 horas diarias. Determine un intervalo de confianza, al 96%, para la media del tiempo de utilización diaria de ordenador.
b) (0’75 puntos) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra para estimar la media del tiempo de utilización diaria del ordenador con un error no superior a 0’75 horas y el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

**Solución**

Sabemos que si tenemos una población con distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

También sabemos que cuando la población no sigue una distribución normal, podemos aplicar el teorema central del límite que dice:
*Si se toman muestras de tamaño n > 30 de una población, con una distribución cualquiera, media $\mu$ y una desviación típica $\sigma$, la distribución muestral de medias $\overline{X}$ se aproxima a una distribución normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.*

Sabemos que un *parámetro* es un valor numérico que describe una característica de la población (**μ**, **p**, $\boldsymbol{\sigma^2}$ , etc. Es decir la media, la proporción, la varianza, ….).

Sabemos que para la media poblacional **μ** el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es: I.C.(**μ**) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica
$p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media.

De esta fórmula despejando "n" (tamaño de la muestra) tenemos $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

El tiempo de utilización diaria de ordenador entre los empleados de una empresa sigue una distribución Normal de media **μ** y desviación típica 1'2 horas.
(a)
Una muestra aleatoria de 40 empleados tiene una media del tiempo de utilización de 2'85 horas diarias. Determine un intervalo de confianza, al 96%, para la media del tiempo de utilización diaria de ordenador.

Datos del problema: $\sigma$ = 1'2; n = 40; $\overline{x}$ = 2'85, nivel de confianza 1 – α = 96% = 0'96.

Como α = 1- 0'96 = 0'04, tenemos α/2 = 0'04/2 = 0'02

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'02 = 0'98. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'98 no viene en la tabla y que el valor más próximo es 0'9798 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'05, por tanto el intervalo de confianza pedido para **μ** es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2'85 - 2'05\cdot\frac{1'2}{\sqrt{40}},\ 2'85 + 2'05\cdot\frac{1'2}{\sqrt{40}}\right) \cong \mathbf{(2'461039,\ 3'23896)}$$

(b)
Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra para estimar la media del tiempo de utilización diaria del ordenador con un error no superior a 0'75 horas y el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

Datos : $\sigma$ = 1'2; Error = E < 0'75; nivel de confianza es 1 – α = 96% = 0'96 y ya hemos visto que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'05, por tanto

En nuestro caso $n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'05.1'2}{0'75}\right)^2$ = 10'7584, por tanto **el tamaño mínimo de la muestra es n = 11**.