

**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2008 (MODELO 6)****OPCIÓN A****EJERCICIO 1\_A**

(3 puntos) Una empresa produce botellas de leche entera y de leche desnatada y tiene una capacidad de producción máxima de 6000 botellas al día. Las condiciones de la empresa obligan a que la producción de botellas de leche desnatada sea, al menos, la quinta parte de las de leche entera y, como máximo, el triple de la misma. El beneficio de la empresa por botella de leche entera es de 20 céntimos y por botella de leche desnatada es de 32 céntimos. Suponiendo que se vende toda la producción, determine la cantidad de botellas de cada tipo que proporciona un beneficio máximo y el importe de este beneficio.

**Solución**

Llamamos "x" al número de botellas de leche entera.

Llamamos "y" al número de botellas de leche desnatada.

*Función Beneficio*

El beneficio de la empresa por botella de leche entera es de 20 céntimos (0'20 €) y por botella de leche desnatada es de 32 céntimos (0'32 €), es decir  $B(x,y) = F(x,y) = 0'20x + 0'32y = 0'2x + 0'32y$ .

*Restricciones:*

Hay una capacidad de producción máxima de 6000 botellas al día, es decir  $x + y \leq 6000$

La producción de botellas de leche desnatada es, al menos, la quinta parte de las de leche entera, luego  $y \geq x/5$ .

La producción de botellas de leche desnatada como máximo, el triple de la leche entera, luego  $y \leq 3x$ .

Por supuesto tiene que producir botellas de entera y desnatada, luego  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

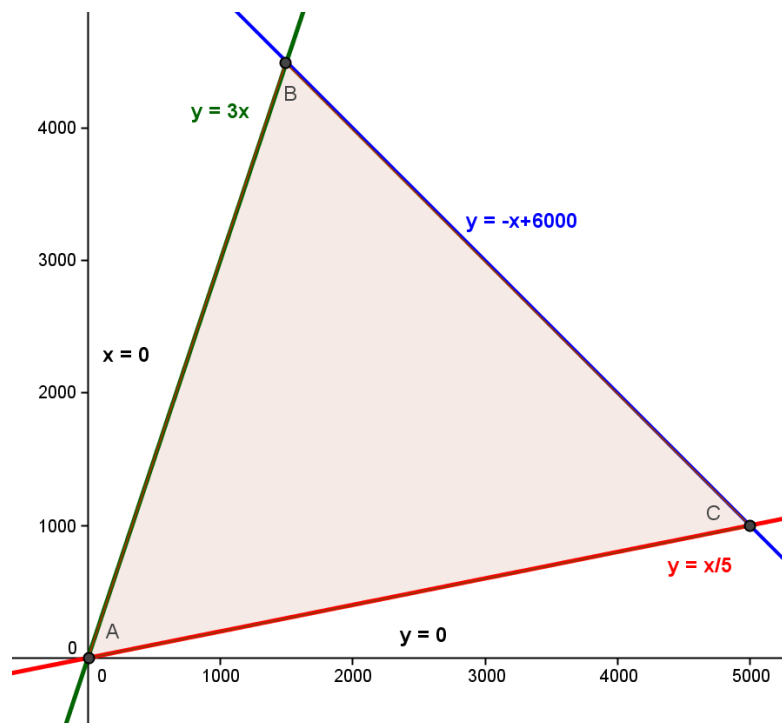
Las desigualdades  $x + y \leq 6000$ ;  $y \geq x/5$ ;  $y \leq 3x$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ , las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

$$x + y = 6000; \quad y = x/5; \quad y = 3x; \quad x = 0; \quad y = 0$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -x + 6000; \quad y = x/5; \quad y = 3x; \quad x = 0; \quad y = 0$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.

De  $y = x/5$  e  $y = 3x$ ; tenemos  $x/5 = 3x$ , de donde " $x = 15x$ ", luego  $9x = 0$ , es decir sale " $x = 0$ " e " $y = 0$ ", y el punto de corte es **A(0,0)**

De  $y = 3x$  e  $y = -x + 6000$ ; tenemos  $3x = -x + 6000$ , de donde " $4x = 6000$ ", luego " $x = 1500$ " e " $y = 4500$ ", y el

**punto de corte es B(1500,4500)**

De  $y = x/5$  e  $y = -x + 6000$ ; tenemos  $x/5 = -x + 6000$ , de donde " $x = -5x + 30000$ ", luego " $6x = 30000$ ", es decir " $x = 5000$ " e " $y = 1000$ ", y **el punto de corte es C(5000,1000)**

Vemos que **los vértices del recinto son: A(0,0); B(1500,4500) y C(5000,1000).**

Calculemos los valores máximo y mínimo de la función  $F(x,y) = 0'20x + 0'32y$  en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0); B(1500,4500) y C(5000,1000).

$$F(0,0) = 0'20(0) + 0'32(0) = 0; \quad \mathbf{F(1500,4500) = 0'20(1500) + 0'32(4500) = 1740};$$

$$F(5000,1000) = 0'20(5000) + 0'32(1000) = 1320;$$

**Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 1740 € (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice B(1500,4500), es decir el beneficio máximo es de 1740 € y se obtiene haciendo produciendo 1500 botellas de leche entera y 4500 botellas de leche desnatada.**

**EJERCICIO 2\_A**

Sea la función definida de la forma  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) (1 punto) ¿Es  $f$  continua en  $x = 0$ ? ¿Es continua en su dominio?  
 b) (1 punto) ¿Es  $f$  derivable en  $x = 0$ ? ¿Es derivable en su dominio?  
 c) (1 punto) Estudie la monotonía de  $f$ .

**Solución**

Sea la función definida de la forma  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- (a)  
 ¿Es  $f$  continua en  $x = 0$ ? ¿Es continua en su dominio?

Vemos que el dominio de  $f(x)$  es  $\mathbb{R}$ .

Sabemos que  $f$  es continua en  $x = 0$ , luego  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 1) = 1.$$

Como  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ,  **$f(x)$  es continua en  $x = 0$ .**

Sabemos que la exponencial  $e^x$  es continua en  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x < 0$ .

Sabemos que el polinomio  $x^2 + x + 1$  es continua en  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x > 0$ , hemos visto que es continua en  $x=0$ , por tanto  **$f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$ , es decir es continua en su dominio.**

- (b)  
 ¿Es  $f$  derivable en  $x = 0$ ? ¿Es derivable en su dominio?

De  $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ , tenemos  $f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Sabemos que  $f$  es derivable en  $x = 0$ , si  $f'(0^-) = f'(0^+)$ , estamos viendo la continuidad de la derivada.

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x) = e^0 = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1.$$

Como  $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$ ,  **$f(x)$  es derivable en  $x = 0$ .**

Sabemos que la exponencial  $e^x$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x < 0$ .

Sabemos que el polinomio  $x^2 + x + 1$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , en particular en  $x > 0$ , hemos visto que es derivable en  $x=0$ , por tanto  **$f(x)$  es derivable en  $\mathbb{R}$ , es decir es derivable en su dominio.**

- (c)  
 Estudie la monotonía de  $f$ .

Nos están pidiendo el estudio de la primera derivada  $f'(x)$ .

Si  $x < 0$ ,  $f'(x) = e^x$ .

De  $f'(x) = 0$  tenemos  $e^x = 0$ , que no tiene solución, porque la exponencial no se anula nunca.

Como  $f'(-1) = e^{-1} = 1/e > 0$ , luego **f(x) es estrictamente creciente en  $(-\infty, 0)$**

Si  $x > 0$ ,  $f'(x) = 2x + 1$ .

De  $f'(x) = 0$  tenemos  $2x + 1 = 0$ , de donde  $x = -1/2$  que no está en  $x > 0$ .

Como  $f'(1) = 1 > 0$ , luego **f(x) es estrictamente creciente en  $(0, +\infty)$ , luego f(x) es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$ .**

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte I

(2 puntos) Ana y Blas deciden jugar con un dado de la siguiente forma:

“Ana lanza el dado y, si saca un 6, gana y se acaba el juego. En caso contrario lanza Blas, que gana si saca un 2 o un 3, y también se acaba el juego. De no ocurrir esto, la partida se acaba sin ganador.

Halle la probabilidad de los siguientes sucesos: “gana Ana”, “gana Blas”, “ninguno gana”.

#### Solución

Sean los sucesos A y B “gana Ana” y “gana Blas”, respectivamente.

Por la lectura del problema los sucesos A y B son incompatibles, luego  $p(A \cap B) = 0$

**P(A) = p(gana Ana) = p(Ana lanza el dado y, si saca un 6, gana y se acaba el juego) =**  
**= p(sacar un 6 al lanzar dado) = 1/6.**

**P(B) = p(gana Blas) = p(no sale un 6, lanza Blas, que gana si saca un 2 o un 3, y también se acaba el juego) =**  
**= p( no salir un 6) · p(sacar un 2 o un 3) = (5/6) · (2/6) = 5/18.**

**P(ninguno gana) = p(noA y noB) = p(A<sup>C</sup> ∩ B<sup>C</sup>) = {ley de Morgan} = p(A ∪ B)<sup>C</sup> = {suceso contrario} =**  
**= 1 - p(A ∪ B) = 1 - (p(A ∪ B) = 1 - ( p(A) + p(B) - p(A ∩ B) ) = 1 - (1/6 + 5/18 - 0) = 5/9**

### EJERCICIO 3\_A

#### Parte II

(2 puntos) En una muestra representativa de 1200 residentes de una ciudad, 450 utilizan habitualmente el transporte público. Obtenga el intervalo de confianza, al 90%, de la proporción de residentes en la ciudad que utilizan habitualmente el transporte público.

#### Solución

Para construir el intervalo:

- Se elige un *estimador* del parámetro que se desea estimar ( $\bar{X}$  para  $\mu$ , y  $\hat{p}$  para  $p$ ), en nuestro caso es de

proporción luego es  $\hat{p} = \frac{450}{1200} = 0'375$

- Se elige un *nivel de confianza*  $1 - \alpha$  con el que se desea construir el intervalo, que nos lo dan y es del 90%, es decir  $1 - \alpha = 90\% = 0'90$ , de donde  $\alpha = 0'10 = 10\%$  como *nivel de significación*, luego  $\alpha/2 = 0'10/2 = 0'05$ .

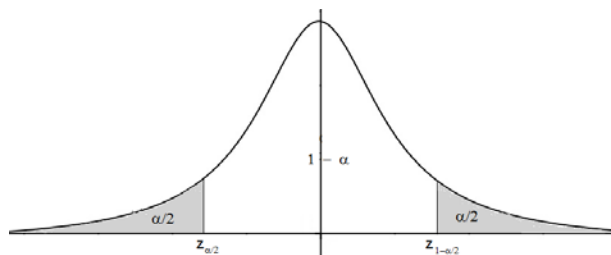
- El intervalo para estimar  $p$  centrado en el estadístico  $\hat{p}$  obtenido de la muestra sería:

$$\text{I.C.}(p) = \left( \hat{p} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

Donde  $z_{1-\alpha/2}$  es el *punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$  tal que  $p(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$ .

De esa igualdad se deduce que  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ , que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico  $z_{1-\alpha/2}$ .

$p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'10/2 = 0'95$ , mirando en la tabla de la  $N(0,1)$  vemos que no viene y que los valores más próximos son 0'9495 y 0'9505 que corresponden a  $z_1 = 1'64$  y  $z_2 = 1'65$ , luego su punto medio sería el punto crítico  $z_{1-\alpha/2} = (1'64+1'65)/2 = 1'645$ .



Por tanto el intervalo de confianza pedido es

$$\begin{aligned} \text{I.C.}(\hat{p}) &= \left( \hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) = \\ &= \left( 0'375 - 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0'375 \cdot 0'625}{1200}}, 0'375 + 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0'375 \cdot 0'625}{1200}} \right) \cong (0'352; 0'0'398) \end{aligned}$$

**OPCIÓN B****EJERCICIO 1\_B**

Sean  $A$  y  $B$  las matrices siguientes:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcule  $(A + B) \cdot (A - B)$

b) (2 puntos) Determine la matriz  $X$ , cuadrada de orden 2, en la ecuación matricial  $(A + 2B) \cdot X = 3 \cdot I_2$ .

**Solución**

Sean  $A$  y  $B$  las matrices siguientes:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(a)

Calcule  $(A + B) \cdot (A - B)$

$$(A + B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A + B) \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -8 & -9 \end{pmatrix}$$

(b)

Determine la matriz  $X$ , cuadrada de orden 2, en la ecuación matricial  $(A + 2B) \cdot X = 3 \cdot I_2$ .

$$\text{Llamamos } C = A + 2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Si la matriz  $C$  tiene matriz inversa  $C^{-1}$ , ( podemos pasar de  $(C|I_2)$  mediante transformaciones elementales a  $(I_2|C^{-1})$  ), multiplicaremos la expresión matricial  $C \cdot X = 3 \cdot I_2$  por la izquierda por la matriz  $C^{-1}$ , quedando:

$$\text{De } C \cdot X = 3 \cdot I_2, \text{ tenemos } C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot 3 \cdot I_2 \rightarrow I_2 \cdot X = 3 \cdot C^{-1} \rightarrow X = 3 \cdot C^{-1}.$$

$$(C|I_2) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 4 \cdot F_1} \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 / (9)} \approx \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/9 & 1/9 \end{array} \right) = (I_2|C^{-1}), \text{ por tanto } C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Luego } X = 3 \cdot C^{-1} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4/9 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

**EJERCICIO 2\_B**

a) (1'5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{2}{x}$  en el punto de abscisa 1.

b) (1'5 puntos) Sea la función  $g(x) = x^3 + ax^2 + b$ . Calcule  $a$  y  $b$  sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto  $(2, 5)$ .

**Solución**

(a)

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \frac{2}{x}$  en el punto de abscisa 1.

La ecuación de la recta tangente en  $x = 1$  es “ $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$ ”.

De  $f(x) = \frac{2}{x}$ , tenemos  $f(1) = 2$ . De  $f'(x) = \frac{-2}{x^2}$ , tenemos  $f'(1) = -2$ .

**Luego la recta tangente en  $x = 1$  es “ $y - 2 = -2 \cdot (x - 1)$ ”, es decir  $y = -2x + 4$ .**

(b)

Sea la función  $g(x) = x^3 + ax^2 + b$ . Calcule  $a$  y  $b$  sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto  $(2, 5)$ .

Por ser punto  $g(2) = 5$ .

Por ser punto de inflexión  $g'(2) = 5$ .

De  $g(x) = x^3 + ax^2 + b$  tenemos  $g(2) = 5$ , es decir  $8 + 4a + b = 5$ .

De  $g(x) = x^3 + ax^2 + b$  tenemos  $g'(x) = 3x^2 + 2ax$ , con lo cual de  $g'(2) = 0$ , resulta  $12 + 4a = 0$ , de donde  $a = -3$ .

Entando con  $a = -3$  en  $8 + 4a + b = 5$ , tenemos  $b = 9$ .

Luego  $a = -3$  y  $b = 9$ .

### EJERCICIO 3\_B

#### Parte I

En una industria de calzado se producen botas y sandalias. De cada 12 pares producidos, 7 pares son botas y 5 de sandalias. La probabilidad de que un par de botas sea defectuoso es 0'08 y de que lo sea un par de sandalias es 0'03. Se escoge al azar un par y resulta ser "no defectuoso".

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido un par de botas?

b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido un par de sandalias?

#### Solución

En una industria de calzado se producen botas y sandalias. De cada 12 pares producidos, 7 pares son botas y 5 de sandalias. La probabilidad de que un par de botas sea defectuoso es 0'08 y de que lo sea un par de sandalias es 0'03. Se escoge al azar un par y resulta ser "no defectuoso".

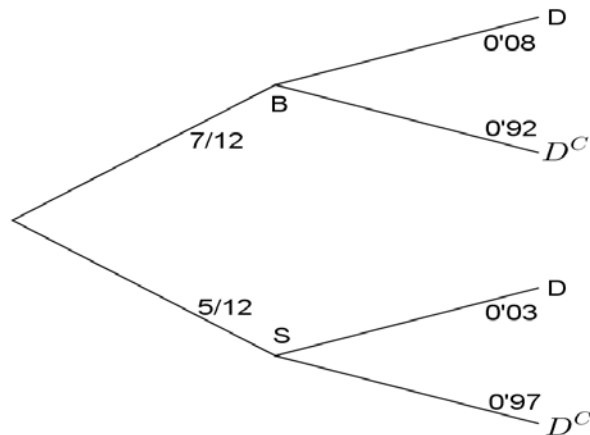
a)

¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido un par de botas?

Llamemos B, S, D y  $D^c$ , a los sucesos siguientes, "pares de botas", "pares de sandalias", "par defectuoso" y "par no defectuoso", respectivamente.

Además tenemos  $p(B) = 7/12$ ,  $p(S) = 5/12$ ,  $p(D/B) = 0'08$ ,  $p(S/B) = 0'03$

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



Como la pregunta previa es estar "no defectuoso", Aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos:

$$p(\text{no defectuoso}) = p(D^c) = p(B) \cdot p(D^c/B) + p(S) \cdot p(D^c/S) = (7/12) \cdot (92/100) + (5/12) \cdot (97/100) = 1129/1200.$$

Se escoge al azar un par y resulta ser "no defectuoso".

a)

¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido un par de botas?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(B/D^c) = \frac{p(B \cap D^c)}{p(D^c)} = \frac{p(B) \cdot p(D^c/B)}{p(D^c)} = \frac{(7/12) \cdot (92/100)}{(1129/1200)} = 644/1129 \cong 0'57.$$

Se escoge al azar un par y resulta ser "no defectuoso".

a)

¿Cuál es la probabilidad de que se haya escogido un par de sandalias?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(S/D^c) = \frac{p(S \cap D^c)}{p(D^c)} = \frac{p(S) \cdot p(D^c/S)}{p(D^c)} = \frac{(5/12) \cdot (97/100)}{(1129/1200)} = 485/1129 \cong 0'43.$$

### EJERCICIO 3\_B

#### Parte II

El consumo, en gramos, de un cierto producto sigue una ley Normal con varianza  $225 \text{ g}^2$ .

a) (1 punto) A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 175 g. Halle un

intervalo de confianza, al 90%, para la media del consumo.

b) (1 punto) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 95%, tenga una amplitud máxima de 5?

### Solución

Sabemos que si tenemos una población con distribución normal  $N(\mu, \sigma)$  y extraemos de ella muestras de tamaño  $n$ , la distribución muestral de medias  $\bar{X}$  sigue también una distribución normal:  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

También sabemos que cuando la población no sigue una distribución normal, podemos aplicar el teorema central del límite que dice:

Si se toman muestras de tamaño  $n > 30$  de una población, con una distribución cualquiera, media  $\mu$  y una desviación típica  $\sigma$ , la distribución muestral de medias  $\bar{X}$  se aproxima a una distribución normal  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

Sabemos que un *parámetro* es un valor numérico que describe una característica de la población ( $\mu$ ,  $p$ ,  $\sigma^2$ , etc. Es decir la media, la proporción, la varianza, ...).

Sabemos que para la media poblacional  $\mu$  el *estimador* MEDIA MUESTRAL  $\bar{X}$ , sigue una  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ , y

generalmente escribimos  $\bar{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  o  $\bar{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:  $I.C.(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  es el *punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$  que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para el intervalo de la media.

De esta fórmula despejando "n" (tamaño de la muestra) tenemos  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$ .

El consumo, en gramos, de un cierto producto sigue una ley Normal con varianza  $225 \text{ g}^2$ .

(a)

A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 175 g. Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media del consumo.

Datos del problema:  $\sigma^2 = 225$ , luego  $\sigma = 15$ ;  $n = 25$ ;  $\bar{x} = 175$ , nivel de confianza  $1 - \alpha = 90\% = 0.90$ .

Como  $\alpha = 1 - 0.90 = 0.10$ , tenemos  $\alpha/2 = 0.10/2 = 0.05$

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0.05 = 0.95$ , mirando en la tabla de la  $N(0,1)$  vemos que no viene 0.95, y que los valores más próximos son 0.9495 y 0.9505 que corresponden a  $z_1 = 1.64$  y  $z_2 = 1.65$ , luego su punto medio sería el punto crítico  $z_{1-\alpha/2} = (1.64 + 1.65)/2 = 1.645$ , por tanto el intervalo de confianza pedido para  $\mu$  es:

$$I.C.(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \left( 175 - 1.645 \cdot \frac{15}{\sqrt{25}}, 175 + 1.645 \cdot \frac{15}{\sqrt{25}} \right) \cong (170.065, 179.935)$$

(b)

¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 95%, tenga una amplitud máxima de 5?

Datos:  $\sigma = 15$ ; Amplitud =  $2 \cdot E$ , es decir  $E < 5/2 = 2.5$ ; nivel de confianza es  $1 - \alpha = 95\% = 0.95$ , luego  $\alpha = 0.05$ . De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0.05/2 = 0.975$ , mirando en la tabla de la  $N(0,1)$  vemos que viene 0.975, y que corresponden al punto crítico  $z_{1-\alpha/2} = 1.96$ , por tanto:

En nuestro caso  $n > \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{1.96 \cdot 15}{2.5} \right)^2 = 138.2976$ , por tanto el **tamaño mínimo de la muestra es**

**$n = 139$ .**