

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II.

Ejercicio 1. La altura en cm. de las cañas producidas por una variedad de carrizo en cada cosecha es una variable aleatoria que sigue una ley normal con desviación típica $\sigma = 16$ cm. Para contrastar si la altura media de las cañas de la última cosecha es de 170 cm, se ha tomado una muestra aleatoria de 64 de estas cañas y se han medido sus longitudes, resultando como media muestra $\bar{x} = 166$ cm.

¿Son suficientes estos datos para rechazar que la altura media de las cañas de la última cosecha es de 170 cm, a un nivel de significación $\alpha = 0,05$?

Sol:

Estos datos son suficientes para rechazar, a este nivel, que la altura media de las cañas de esta cosecha sea de 170 cm

Ejercicio 2. Un comerciante ha observado durante un largo periodo de tiempo que sus beneficios semanales se distribuyen según una ley normal con una media de 5000 euros y una desviación típica de 520 euros. A finales del año pasado se abrió un supermercado frente a su comercio y él cree que su beneficio semanal medio ha disminuido desde entonces. Para contrastar esta suposición, ha tomado una muestra aleatoria de 16 semanas del año actual y ha encontrado que el beneficio semanal medio de esa muestra es de 4700 euros. ¿Puede afirmarse, a un nivel de significación $\alpha = 0,01$, que estos datos avalan la creencia del comerciante?

Sol:

No se puede afirmar, al nivel 0,01, que los datos de la muestra apoyan la creencia de que el nuevo supermercado ha disminuido el beneficio semanal medio del comerciante.

Ejercicio 3. Sólo el 75 % de los alumnos de un centro de enseñanza realizan correctamente un test psicotécnico que lleva utilizándose mucho tiempo. Para tratar de mejorar este resultado, se modificó la redacción del test, y se propuso a un grupo de 120 alumnos de ese centro, elegidos al azar. De los 120 alumnos a los que se le pasó el nuevo test, lo realizaron correctamente 107. ¿Podemos afirmar que la nueva redacción del test ha aumentado la proporción de respuestas correctas, a un nivel de significación $\alpha = 0,025$?

Sol:

Podemos afirmar que la nueva redacción del test ha aumentado la proporción de respuestas correctas, a un nivel de significación $\alpha = 0,025$.

Ejercicio 4. El peso en vacío de los envases fabricados por una empresa, según su método usual, es una variable aleatoria que sigue una ley normal con media 20 gramos y una desviación típica de 1 gramo. Se desea contrastar si un nuevo proceso de fabricación no aumenta dicho peso medio. Para ello, se eligen al azar 25 envases fabricados por la nueva técnica y se encuentra que la media de su peso en vacío es de 20,5 gramos.

¿Se puede afirmar, a un nivel de significación $\alpha = 0,02$, que el nuevo proceso ha aumentado el peso medio de los envases?

Sol:

A la vista de los datos obtenidos en la muestra, se puede afirmar, al nivel $\alpha = 0,02$, que el nuevo proceso ha aumentado el peso medio de los envases.

Ejercicio 5. En unas elecciones municipales de una ciudad, el 42% de los votantes dieron su voto al partido A. En una encuesta realizada un año después a 500 personas con derecho a voto, sólo 184 votarían al partido A. Con estos datos, ¿puede afirmarse que ha disminuido la proporción de votantes a ese partido? Responder a la pregunta anterior con niveles de significación $\alpha = 0,01$, $\alpha = 0,025$ y $\alpha = 0,001$.

Sol:

Los datos permiten afirmar que ha disminuido la proporción de votantes al partido A a los niveles 0,025 y 0,01, pero no ha disminuido la proporción al nivel 0,001.

Ejercicio 6. En una ciudad, donde la proporción de fumadores con edad comprendida entre 18 y 20 años es del 30%, el ayuntamiento ha realizado una campaña contra el consumo de tabaco. Dos meses después de terminar dicha campaña, se ha realizado una encuesta a 400 personas de estas edades, elegidas al azar, y se ha encontrado entre ellos a 92 fumadores. ¿Podemos afirmar, a un nivel de significación $\alpha = 0,05$, que esta campaña ha modificado la proporción de fumadores entre 18 y 25 años?

Sol:

Estos datos son suficientes para afirmar, al nivel 0,05, que se ha modificado la proporción de fumadores entre los 18 y 25 años.

Ejercicio 7. Un fabricante de automóviles produce dos tipos de un determinado modelo de turismo: el tipo A, con motor de gasolina, y el tipo B, con motor de gasoil. De una muestra aleatoria de 200 turismos de este modelo, 112 son del tipo B. ¿Proporcionan estos datos suficiente evidencia, a un nivel de significación $\alpha = 0,01$, de que los clientes prefieren el modelo del tipo B al del tipo A?

Sol:

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II.

No tenemos evidencias suficientes para afirmar que los clientes prefieren el modelo del tipo B de gasoil, al del tipo A de gasolina, al nivel de significación $\alpha = 0,01$.

Ejercicio 8. Supongamos que 100 neumáticos de cierta marca duraron en promedio 21431 kilómetros. Si se supone que la población es normal con una desviación típica poblacional de 1295 km, utilizando $\alpha = 0,05$, ¿podemos considerar que la duración media de los neumáticos es inferior a 22000 km?

Sol:

Podemos afirmar que la duración media de los neumáticos de dicha marca es menor de 22000 km, con una probabilidad de error tipo I, α , del 5%.

Ejercicio 9. Un constructor afirma que por lo menos el 75% de las casas que construye tienen calefacción. ¿Se estaría de acuerdo con tal afirmación si una inspección aleatoria muestra que 72 de 135 casas cuentan con calefacción? (Usar $\alpha = 0,1$)

Sol:

Los datos de la muestra son suficientes para rechazar, a este nivel $\alpha = 0,1$, la afirmación del constructor de que la proporción de casas con calefacción que éste construye no es inferior al 75%.

Ejercicio 10. Una compañía textil afirma que a lo sumo el 20% del público compra ropa de lana. Verifica esta afirmación para $\alpha = 0,01$, si una encuesta aleatoria indica que 46 de 200 clientes compran ropa de lana.

Sol:

Los datos de la muestra no son suficientes para rechazar, a este nivel, que la proporción del público que compra ropa de lana no supera el 20%.

Ejercicio 11. Se sabe que la longitud en cm de una determinada especie de coleópteros sigue una distribución normal de varianza $0,25 \text{ cm}^2$. Capturados 6 ejemplares de dicha especie, sus longitudes (en cm) fueron:

2;75 1;72 2;91 2;6 2;64 3;34

¿Se puede aceptar la hipótesis de que la población tiene una longitud media de 2;656 cm? (Usar $\alpha = 0;05$)

Sol:

No tenemos evidencias suficientes para rechazar que la longitud media de esa especie de coleópteros es de 2.656 cm, con una probabilidad de error tipo I, α , del 5%.

Ejercicio 12. La edad de la población que vive en residencias de mayores en Cádiz sigue una distribución normal de desviación típica 7,3 años. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50, y se obtiene una media muestral de 69 años. ¿Se puede asegurar que la edad media de la población que vive en residencias de mayores en Cádiz es mayor de 70 años con un nivel de significación del 5% ?

Sol:

Puede decirse que los datos de la muestra no permiten afirmar que la media de edad de esas personas sea mayor que 70 años, al nivel de significación $\alpha = 0,05$.

Ejercicio 13. Para conocer la producción media de sus olivos, un olivarero escoge al azar 10 de ellos, pesa su producción de aceitunas, y obtiene los siguientes valores, expresados en kg: 175, 180, 210, 215, 186, 213, 190, 213, 184, 195. Sabemos que la producción sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.3 kg. Con la información obtenida, ¿se puede asegurar que la producción media de un olivo de ese agricultor es menor de 200 kg? (Usar $\alpha = 0,05$)

Sol:

Puede decirse que los datos de la muestra confirman que la producción media de un olivo de ese agricultor es menor de 200 kg, al nivel de significación $\alpha = 0,05$.

Ejercicio 14. El 40% de los escolares de cierto país suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias. Las autoridades defienden que el porcentaje del 40% para toda la población de escolares se ha mantenido. Contrastar con un nivel de significación del 5% la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado, como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.

Sol:

Estos datos son suficientes para afirmar, al nivel $\alpha = 0,05$, que el porcentaje de escolares que pierden al menos un día de clase por causa de gripes y catarros ha aumentado, por lo que ese porcentaje es mayor del 40%. Entonces, la hipótesis mantenida por las autoridades no es correcta.

Ejercicio 15. Una de las entradas a cierta ciudad andaluza sufría constantemente retenciones de tráfico, de forma que el tiempo de espera en la cola formada por el semáforo allí instalado seguía una distribución Normal de media 10 minutos y desviación típica 4 minutos. Con el fin de descongestionar ese punto y bajar la media de tiempo de espera, se habilitó una vía de acceso auxiliar. Transcurrida una semana se hizo un estudio sobre 36 vehículos y se obtuvo que el tiempo medio de espera en el citado semáforo fue de 8.5 minutos. Las autoridades municipales mostraron su satisfacción y dijeron que la medida había funcionado, pero la opinión pública, sin embargo, defiende que la situación sigue igual. Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II.

a) Plantee un test para contrastar la hipótesis defendida por la opinión pública frente a la de los responsables municipales. Si se concluye que la media de tiempo de espera bajó y realmente no lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5% ?

c) ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 1% ?

Sol:

a) El error se denomina Error tipo I, y la probabilidad de cometer un error de tipo I se denomina α .

b) Estos datos son suficientes para afirmar, al nivel $\alpha = 0,05$, que el tiempo medio de espera en dicho semáforo ha bajado, por lo que ese tiempo de espera es ahora menor de 10 minutos. Entonces, la hipótesis mantenida por las autoridades municipales es correcta, y la medida de habilitar una vía de acceso auxiliar ha descongestionado el tráfico en la entrada de dicha ciudad.

c) Sin embargo, para un nivel $\alpha = 0,01$ no se puede rechazar la hipótesis nula, y por tanto el tiempo medio de espera en el semáforo sigue siendo de 10 minutos.

Ejercicio 16. En un hospital se observó que los pacientes abusaban del servicio de urgencias, de forma que un 30% de las consultas podían perfectamente haber esperado a concertar una cita con el médico de cabecera, porque no eran realmente urgencias. Puesto que esta situación ralentizaba el servicio, se realizó una campaña intensiva de concienciación. Transcurridos unos meses se ha recogido información de 120 consultas al servicio, de las cuales sólo 30 no eran realmente urgencias:

a) Hay personal del hospital que defiende que la campaña no ha mejorado la situación. Plantee un test para contrastar esta hipótesis frente a que si la mejoró. Si se concluye que la situación no ha mejorado y realmente sí lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

b) ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior con un nivel de significación del 1%?

Sol:

a) El error se denomina Error tipo II.

b) La campaña de concienciación no ha reducido el porcentaje de pacientes (30%) que abusan del servicio de urgencias, al nivel de significación $\alpha = 0,01$.

Ejercicio 17. El alcalde de una ciudad prometió, en su programa electoral, oponerse a la construcción de una central de tratamiento de ciertos residuos, puesto que en aquel momento sólo un 10% de los ciudadanos estaban a favor de la central de tratamiento de residuos. En los últimos días se ha encuestado a 100 personas de las cuales 14 están a favor de la central. El alcalde afirma sin embargo que el porcentaje de ciudadanos a favor sigue siendo del 10% o incluso ha disminuido. ¿Tiene razón el alcalde con un nivel de significación del 2%?

Sol:

No tenemos evidencias suficientes para afirmar que el porcentaje de ciudadanos que están a favor de la construcción de la central de tratamiento de residuos es mayor del 10%, al nivel de significación $\alpha = 0,02$. Por tanto, los datos de la muestra avalan la opinión del alcalde de que el porcentaje de ciudadanos a favor sigue siendo del 10% o incluso ha disminuido.

Ejercicio 18. Se desea estudiar el gasto mensual de los teléfonos móviles, en euros, de los estudiantes universitarios andaluces. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 10 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para el gasto mensual en móvil:

30 60 25 20 25 30 35 45 50 40

Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y de desviación típica igual a 12 euros.

a) ¿Se puede asegurar que los estudiantes universitarios andaluces gastan menos de 50 euros mensuales en teléfono móvil? (Usar $\alpha = 0,01$)

b) ¿Cuál es la desviación típica de la media muestral?

Sol:

a) Estos datos son suficientes para afirmar, al nivel $\alpha = 0,01$, que los estudiantes universitarios andaluces gastan menos de 50 euros al mes en teléfono móvil.

b) La desviación típica de la media muestral es $12/\sqrt{10} = 3,795$.

Ejercicio 19. Una máquina de envasado automático llena en cada saco una cierta cantidad de determinado producto. Se seleccionan 20 sacos, se pesa su contenido y se obtienen los siguientes resultados (en kilos):

49, 50, 49, 50, 50, 50, 49, 50, 50, 50, 49, 50, 50, 51, 52, 48, 50, 51, 51, 51

A partir de esta información y suponiendo que la variable, peso de cada saco, se distribuye normalmente con desviación típica 1 kg:

a) ¿Se puede admitir que el peso medio de los sacos que llena la máquina es de aproximadamente 51 kg? (Usar $\alpha = 0,01$)

b) ¿Se puede admitir que el peso medio de los sacos que llena la máquina es menor de 50 kg? (Usar $\alpha = 0,05$)

Sol:

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II.

a) Podemos afirmar que la máquina no envasa sacos de aproximadamente 51 kg, al nivel de significación $\alpha=0,01$.

b) Podemos decir que los mismos datos apoyan la hipótesis de que el peso medio de los sacos no es inferior a los 50 Kg, al nivel de significación $\alpha=0,05$.

Ejercicio 20. El consumo de cierto producto sigue una distribución normal con varianza 300. A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 180.

a) Halle un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo.

b) ¿Se podría afirmar que el consumo medio de este producto no llega a 200? (Usar $\alpha=0,05$)

Sol:

a) Un intervalo de confianza al 95 % para la media del consumo es $\mu \in (173,21; 186,79)$.

b) Los datos de esta muestra permiten afirmar que el consumo medio de este producto no llega a 200, al nivel de significación $\alpha=0,05$.

Ejercicio 21. Los estudiantes universitarios de cierto país dedican al estudio un número de horas semanales que sigue una distribución normal de media desconocida y de desviación típica 7 horas. Si en una muestra de 200 estudiantes se obtuvo una media muestral de 30 horas de estudio semanal.

a) Halle un intervalo de confianza al 95% para el número de horas de estudio semanales de los estudiantes universitarios de dicho país.

b) ¿Se podría afirmar que los estudiantes universitarios de ese país estudian menos de 35 horas semanales? (Usar $\alpha=0,01$)

Sol:

a) Un intervalo de confianza al 95% para la media de horas de estudio semanales de los universitarios es $\mu \in (29,03; 30,97)$.

b) Podemos afirmar que la media del número de horas de estudio semanales de los universitarios es menor de 35 horas, al nivel de significación $\alpha=0,01$.

Ejercicio 22. La talla de los individuos de una población sigue una distribución normal de desviación típica 8 cm. Se han determinado las tallas de 25 individuos, encontrándose una media de 168 cm. ¿Se podría afirmar que la talla media de la población es menor de 170 cm? (Usar $\alpha=0,03$)

Sol:

No tenemos evidencias suficientes para afirmar que la talla media de la población es menor de 170 cm, al nivel de significación $\alpha=0,03$.

Ejercicio 23. Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica 3 horas. A partir de una muestra aleatoria de tamaño 30 se ha obtenido una media igual a 7 horas. ¿Se podría afirmar que el número medio de horas de sueño de los estudiantes de Bachillerato de dicha comunidad autónoma es mayor de 6 horas? (Usar $\alpha=0,04$)

Sol:

En consecuencia, a este nivel $\alpha=0,04$, los datos de la muestra permiten afirmar que el número medio de horas de sueño de los estudiantes de Bachillerato de dicha comunidad autónoma es mayor de 6 horas.

Ejercicio 24. Las autoridades educativas publican en un estudio que el 25% de los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma tienen ordenador portátil. A partir de una muestra aleatoria de tamaño 300 se ha obtenido que sólo 70 de ellos tienen ordenador portátil. ¿Se podría asegurar que las autoridades dicen la verdad? (Usar $\alpha=0,06$)

Sol:

No tenemos evidencias suficientes para afirmar que el porcentaje de estudiantes de Bachillerato que tienen ordenador portátil es distinto del 25%, al nivel de significación $\alpha=0,06$. En consecuencia, a este nivel, los datos no permiten rechazar que el estudio se corresponda con la realidad. Por tanto, podemos afirmar que las autoridades educativas dicen la verdad

Ejercicio 25. Un laboratorio farmacéutico fabrica un producto para la caída del cabello que envasa en botes, y en el etiquetado indica que su contenido aproximado es de 100 cc. Se eligen, al azar, 7 de estos botes y se miden sus contenidos dando el siguiente resultado (en cc):

97 101 102 99 98 100 103

¿Podemos asegurar que la capacidad media de los botes que se fabrican es la indicada en el bote? (Usar $\alpha=0,01$) (Se sabe que el contenido es una variable aleatoria normal de desviación típica 2 c.c.)

Sol:

Podemos asegurar que la capacidad media de los botes que se fabrican es la indicada en la etiqueta (100 c.c.), al nivel de significación $\alpha=0,01$.

Ejercicio 26. Se ha tomado una muestra de precios de un mismo producto en 16 comercios, elegidos al azar en una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios (en euros):

95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II.

Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida:

a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?

b) ¿Se puede afirmar que el precio medio de dicho producto es menor de 105 euros? (Usar $\alpha = 0,03$)

Sol:

a) La distribución de la media muestral sigue una ley Normal con media desconocida μ (la misma que la media de la población) y desviación típica $5/\sqrt{16} = 5/4 = 1,25$.

b) No tenemos evidencias suficientes para afirmar que el precio medio de dicho producto en esa ciudad es menor de 105 euros, al nivel de significación $\alpha = 0,03$.

Ejercicio 27. Los alumnos de preescolar de Andalucía tienen una estatura que es una variable aleatoria de media desconocida y desviación típica 16 cm. Si seleccionamos una muestra aleatoria de 100 de tales alumnos y obtenemos una estatura media de 95 cm,

a) ¿se puede afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es menor de 95 cm?

(Usar $\alpha = 0,01$) b) ¿se puede afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es mayor de 100 cm? (Usar $\alpha = 0,05$)

Sol:

a) No tenemos evidencias suficientes para afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es menor de 95 centímetros, al nivel de significación $\alpha = 0,01$. Los datos de la muestra no permiten afirmar, a ese nivel, que la estatura media de estos alumnos es menor de 95 cm.

b) No tenemos evidencias suficientes para afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es mayor de 100 centímetros, al nivel de significación $\alpha = 0,05$. Los datos de la muestra no permiten afirmar, a ese nivel, que la estatura media de estos alumnos es mayor de 100 cm.