Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

Ejercicio 1.

La altura en cm. de las cañas producidas por una variedad de carrizo en cada cosecha es una variable aleatoria que sigue una ley normal con desviación típica σ = 16 cm. Para contrastar si la altura media de las cañas de la última cosecha es de 170 cm, se ha tomado una muestra aleatoria de 64 de estas cañas y se han medido sus longitudes, resultando como media muestra $\overline{x}$ = 166 cm.
¿Son suficientes estos datos para rechazar que la altura media de las cañas de la última cosecha es de 170 cm, a un nivel de significación α = 0'05?

Solución

Sabemos que si tenemos una población que sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.
Trabajaremos con lo normal N(0,1)
También se puede hacer con la distribución normal muestra y es parecido a los intervalos de confianza.

Este problema nos plantea un contraste bilateral.

Datos dados: μ_0 = 170, n = 100, desviación típica = σ = 16, $\overline{x}$ = 166; nivel de significación = α = 0'05

El problema la dividimos en cinco etapas

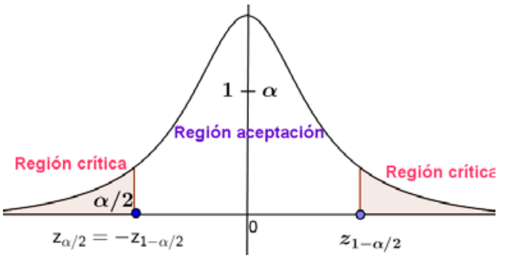
Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: μ_0 = 170 cm y H_1: $\mu_0 \neq$ 170 cm.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

La prueba es bilateral y para un nivel de significación α = 0'05, con lo cual $\alpha/2$ = 0,05/2 = 0'025.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 – 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) obtenemos $z_{1-\alpha}$ = 1'96, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 1'96 y $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = -1'96, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es Z = $\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{166 - 170}{16/\sqrt{100}}$ = - 2'5,

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0=- 2'5 **es menor que el valor crítico** $z_{\alpha/2}$ =
= -1'96, vemos que se encuentra en la zona de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la aceptar hipótesis nula H_0**: μ_0 = 170 cm, a este nivel de significación.

En consecuencia, podemos rechazar la hipótesis nula H_0 **y aceptar que la altura de las caños de carrizo no miden 170 cm, sino menos cm. al nivel de significación 0'05**, pudiendo haber cometido un error del tipo I.

Ejercicio 2.

Un comerciante ha observado durante un largo periodo de tiempo que sus beneficios semanales se distribuyen según una ley normal con una media de 5000 euros y una desviación típica de 520 euros. A finales del año pasado se abrió un supermercado frente a su comercio y él cree que su beneficio semanal medio ha disminuido desde entonces. Para contrastar esta suposición, ha tomado una muestra aleatoria de 16 semanas del año actual y ha encontrado que el beneficio semanal medio de esa muestra es de 4700 euros. ¿Puede afirmarse, a un nivel de significación α = 0'01, que estos datos avalan la creencia del comerciante?

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Datos del problema: Beneficios → N(5000,250); μ_0 = 5000; n = 16; $\overline{x}$ = 4700; σ = 5202; región crítica = α = = 1% = 0'01.

Nos dice el problema que el comerciante cree que su beneficio semanal medio ha disminuido, es decir la hipótesis nula es lo contrario, es decir $H_0 : \mu_0 \geq 5000$, con lo cual un nivel de significación del 1%, por tanto la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 5000$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

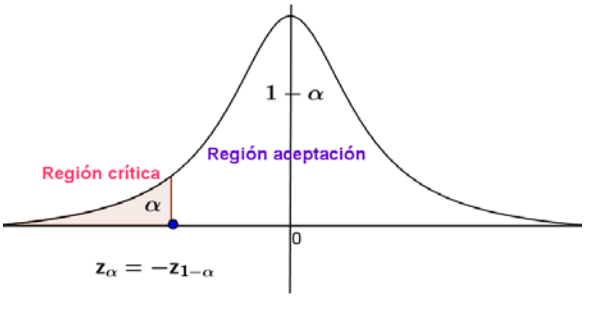
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 5000$ (sus beneficios no han disminuido) y $H_1 : \mu_0 < 5000$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'01 = 0'99, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 2'33 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{10'8 - 11}{2/\sqrt{18}} \cong$

$\cong$ - 0'4243

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 0'4243 es mayor que el **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 2'33, vemos que nos encontramos en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de la aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 5000$.**

Con lo cual, no se puede afirmar, al nivel 0,01, que los datos de la muestra apoyen la creencia de que

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

el nuevo supermercado ha disminuido el beneficio semanal medio del comerciante.

Ejercicio 3.

Sólo el 75 % de los alumnos de un centro de enseñanza realizan correctamente un test psicotécnico que lleva utilizándose mucho tiempo. Para tratar de mejorar este resultado, se modificó la redacción del test, y se propuso a un grupo de 120 alumnos de ese centro, elegidos al azar. De los 120 alumnos a los que se le pasó el nuevo test, lo realizaron correctamente 107. ¿Podemos afirmar que la nueva redacción del test ha aumentado la proporción de respuestas correctas, a un nivel de significación α = 0,025?

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

De "sólo el 75 % de los alumnos realizan correctamente un test", tenemos $H_0 : p_0 \le 0'75$ a niveles de significación de α = 0,025. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $p_0 = 0'42$; n = 120; $\hat{p}$ = 107/120 $\cong$ 0'8916; nivel de significación α = 0,025.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

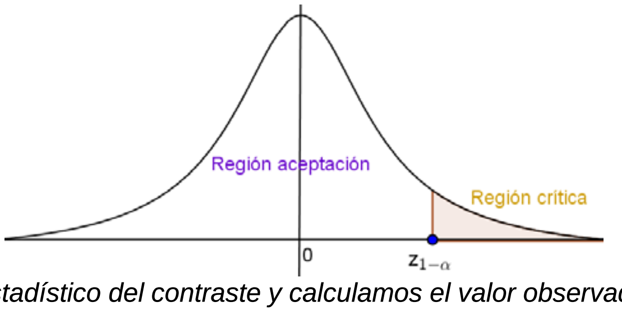
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \le 0'75$ (sólo el 75% superan el test) y $H_1 : p_0 > 0'75$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'0025, luego tenemos 1 - α = 0,9975.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'0025 = 0'9975$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que viene dicha probabilidad y que corresponde al **valor crítico** es $z_{1-\alpha}$ = 2'81 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}}$ =

$$= \frac{0'8916 - 0'75}{\sqrt{\frac{0'75 \cdot 0'25}{120}}} \cong 3'582.$$

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 3'582 está a la derecha del punto crítico 2'81, estamos en la zona de rechazo.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: H_0: $p_0 \le$ 0'75, y aceptamos la hipótesis alternativa H_1 : p_0 > 0'752, para un nivel de significación α = 0'0025.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 0'25%, afirmamos que <u>mas del 75%</u> realizan correctamente los test.

Ejercicio 4.

El peso en vacío de los envases fabricados por una empresa, según su método usual, es una variable aleatoria que sigue una ley normal con media 20 gramos y una desviación típica de 1 gramo. Se desea contrastar si un nuevo proceso de fabricación no aumenta dicho peso medio. Para ello, se eligen al azar 25 envases fabricados por la nueva técnica y se encuentra que la media de su peso en vacío es de 20,5 gramos.
¿Se puede afirmar, a un nivel de significación α = 0,02, que el nuevo proceso ha aumentado el peso medio de los envases?

Solución

Del problema tenemos N(20;1), es decir $\mu_0 = 20$ y $\sigma = 1$; de "no aumenta dicho peso medio", tenemos H_0 : $\mu_0 \le 20$ a nivel de significación de α = 0,02; n = 25; $\overline{x}$ = 20'5. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

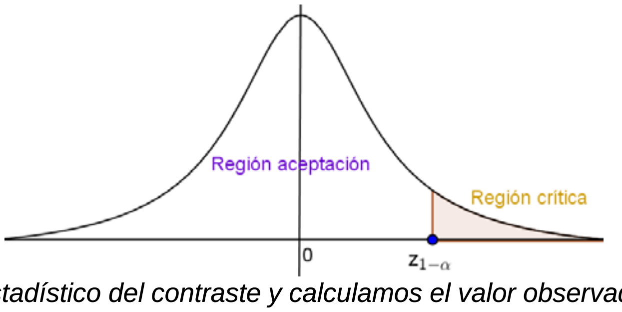
Las hipótesis nula y alternativa son: H_0 : $\mu_0 \le 20$ (no aumenta dicho peso medio) y H_1 : $\mu_0 > 20$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico $z_{1-\alpha}$.*

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'02, luego tenemos 1 - α = 0,98.

De $p(Z \le z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'02 = 0'98, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y el valor más próximo es 0'9821 el cual corresponde al **valor crítico** es $z_{1-\alpha}$ = 2'10 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{20'5 - 20}{1/\sqrt{25}}$ = 2'5.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = 2'5$ está a la derecha del punto crítico 2'10, estamos en la zona de rechazo.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 20$, y aceptamos la hipótesis alternativa $H_1 : \mu_0 > 20$, para un nivel de significación $\alpha = 0'02$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 2%, afirmamos el nuevo proceso de envasado aumenta el peso medio.

Ejercicio 5.

En unas elecciones municipales de una ciudad, el 42% de los votantes dieron su voto al partido A. En una encuesta realizada un año después a 500 personas con derecho a voto, sólo 184 votarían al partido A. Con estos datos, ¿puede afirmarse que ha disminuido la proporción de votantes a ese partido? Responder a la pregunta anterior con niveles de significación α = 0,01, α = 0,025 y α = 0,001.

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Nos dice el problema si puede afirmarse que ha disminuido la proporción de votantes a ese partido, es decir que el porcentaje de votos no es menor del 42%, por tanto la hipótesis nula es $H_0 : p_0 \ge 0'42$ a niveles de significación de α = 0,01, α = 0,025 y α = 0,001. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $p_0 = 0'42$; n = 500; $\hat{p}$ = 184/500 = 0'368; región crítica = α = 0,01 = 1%, α = 0,025 = = 2'5% y α = 0,001 = 0'1%.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \ge 0'42$ (al menos el 42% votan) y $H_1 : p_0 < 0'42$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 2'33 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

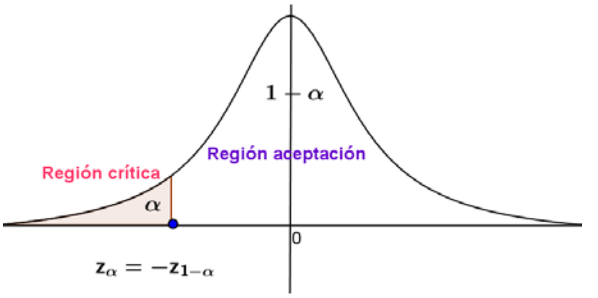
Para el nivel de significación es α = 0'0025, luego tenemos 1 - α = 0,9975.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'0025 = 0'9975$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que viene dicha probabilidad y que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 2'81 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Para el nivel de significación es α = 0'001, luego tenemos 1 - α = 0,999.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'001 = 0'999$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que viene dicha probabilidad y que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 3'09 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el

valor observado del estadístico de prueba será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} =$

$= \dfrac{0'368 - 0'42}{\sqrt{\dfrac{0'42 \cdot 0'58}{500}}} \cong -2'355$.

Recordamos que los puntos críticos eran - 2'33, -2'81 y – 3'09

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -2'355 está en la región de aceptación para los puntos críticos -2'81 y – 3'09. Sin embargo está menor que el **valor crítico** $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 1'645, vemos que nos encontramos en la región de rechazo para el punto crítico – 2'33.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: H_0: $p_0 \ge 0'42$, y aceptamos la hipótesis alternativa H_1 : $p_0 < 0'42$, sólo en el caso del nivel de significación $\alpha = 0'01$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 1%, afirmamos que menos del 42% lo votarán.

Ejercicio 6.

En una ciudad, donde la proporción de fumadores con edad comprendida entre 18 y 20 años es del 30%, el ayuntamiento ha realizado una campaña contra el consumo de tabaco. Dos meses después de terminar dicha campaña, se ha realizado una encuesta a 400 personas de estas edades, elegidas al azar, y se ha encontrado entre ellos a 92 fumadores. ¿Podemos afirmar, a un nivel de significación α = 0,05, que esta campaña ha modificado la proporción de fumadores entre 18 y 25 años?

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}\right)$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Nos dice el problema la proporción de fumadores es del 30%, si puede afirmarse que ha disminuido la proporción de votantes a ese partido, es decir que se ha modificado la proporción (me están diciendo que la hipótesis nula es H_0 : p_0 = 0'30) al nivel de significación de α = 0,05. *Es un contraste bilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: p_0 = 0'30; n = 400; $\hat{p}$ = 92/400 = 0'23; nivel significación = α = 0,05 = 5%

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

El problema la dividimos en cinco etapas

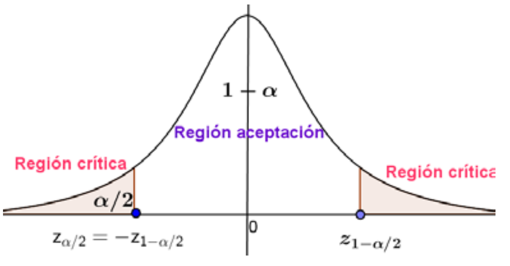
Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: p_0 = 0'30 y H_1: $p_0 \neq$ 0'30.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

La prueba es bilateral y para un nivel de significación α = 0'05, con lo cual $\alpha/2$ = 0,05/2 = 0'025.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 – 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) obtenemos $z_{1-\alpha}$ = 1'96, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 1'96 y $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = -1'96, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el

valor observado del estadístico de prueba será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = = \dfrac{0'23 - 0'3}{\sqrt{\dfrac{0'3 \cdot 0'7}{400}}} \cong -3'055$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 3'055 **es menor que el valor crítico** $z_{\alpha/2}$ = = -1'96, vemos que se encuentra en la zona de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la aceptar la hipótesis nula H_0**: p_0 = 0'30 y aceptar la hipótesis alternativa **H_0**: $p_0 \neq$ 0'30, a este nivel de significación.

En consecuencia, podemos rechazar la hipótesis nula H_0 **y aceptar que** la **proporción de fumadores entre 18 y 25 años ha disminuido al nivel de significación 0'05**, pudiendo haber cometido un error del tipo I.

Ejercicio 7.

Un fabricante de automóviles produce dos tipos de un determinado modelo de turismo: el tipo A, con motor de gasolina, y el tipo B, con motor de gasoil. De una muestra aleatoria de 200 turismos de este modelo, 112 son del tipo B. ¿Proporcionan estos datos suficiente evidencia, a un nivel de significación α = 0,01, de que los clientes prefieren el modelo del tipo B al del tipo A?

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Si los clientes no tiene preferencia tendrían un 50% de opciones de elegir un modelos de coche, como me dicen si hay evidencia de que elijan el modelo B al nivel de significación de α = 0,01, me están dando la dirección del contraste es decir la hipótesis alternativa H_1 : p_0 = 0'50) al nivel de significación de α = 0,01. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: p_0 = 0'50; n = 200; $\hat{p}$ = 112/200 = 0'56; nivel significación = α = 0,01 = 1%

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

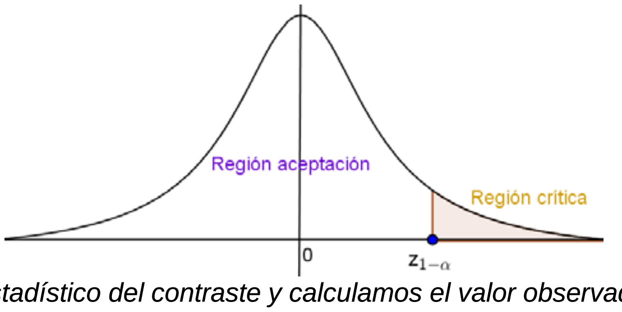
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \leq 0'50$ (no eligen el modelo B) y $H_1 : p_0 > 0'50$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico $z_{1-\alpha}$.*

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y el valor más próximo es 0'9901 el cual corresponde al **valor crítico** es $z_{1-\alpha}$ = 2'33 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = = \dfrac{0'56 - 0'5}{\sqrt{\dfrac{0'5 \cdot 0'5}{200}}} \cong 1'697$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 1'697 está a la izquierda del punto crítico 2'33, estamos en la zona de aceptación.

Resumiendo **aceptamos la hipótesis nula H_0: $p_0 \leq 0'50$, para un nivel de significación α = 0'01.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 1%, no podemos afirmar que prefieran el coche modelo B.

Ejercicio 8.

Supongamos que 100 neumáticos de cierta marca duraron en promedio 21431 kilómetros. Si se supone que la población es normal con una desviación típica poblacional de 1295 km, utilizando α = 0,05 , ¿podemos considerar que la duración media de los neumáticos es inferior a 22000 km?

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Datos del problema: n = 100; $\overline{x}$ = 21431; μ_0 = 22000; σ = 1295; nivel significación = α = 0'05.

Nos dice el problema si podemos considerar que la duración media de los neumáticos es inferior a 22000 km, es decir la hipótesis nula es lo contrario, es decir $H_0 : \mu_0 \geq 22000$, con lo cual un nivel de significación del 5%, por tanto la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 22000$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

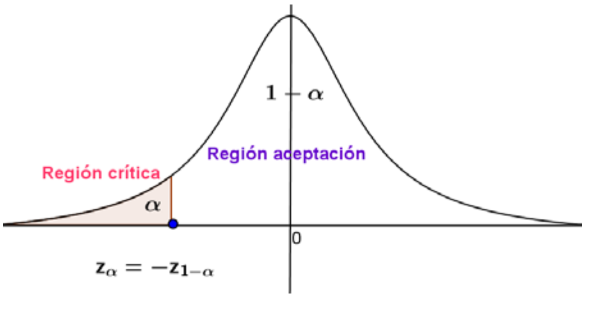
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 22000$ (sus beneficios no han disminuido) y $H_1 : \mu_0 < 22000$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos 1 - α = 0,95.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. Uno de los valores más próximo es 0'9495, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 1'94 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{21431 - 22000}{1295/\sqrt{100}} \cong$

$\cong$ - 4'3938

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 4'3938 es menor que el **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 1'64, vemos que nos encontramos en la región de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de la rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 22000$ y aceptar la hipótesis alternativa H_0: $\mu_0 < 22000$.**

Con lo cual, se puede afirmar, al nivel 0,05, que los neumáticos no llegan a durar 22000 km.

Ejercicio 9.

Un constructor afirma que por lo menos el 75% de las casas que construye tienen calefacción. ¿Se estaría de acuerdo con tal afirmación si una inspección aleatoria muestra que 72 de 135 casas cuentan con calefacción? (Usar α = 0,1)

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Nos dice el problema que "un constructor afirma que por lo menos el 75% "por tanto la hipótesis nula es $H_0 : p_0 \geq 0'75$ a niveles de significación de α = 0,01. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: p_0 = 0'75; n = 135; $\hat{p}$ = 72/135 $\cong$ 0'5333; nivel significación = α = 0,01 = 1%.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

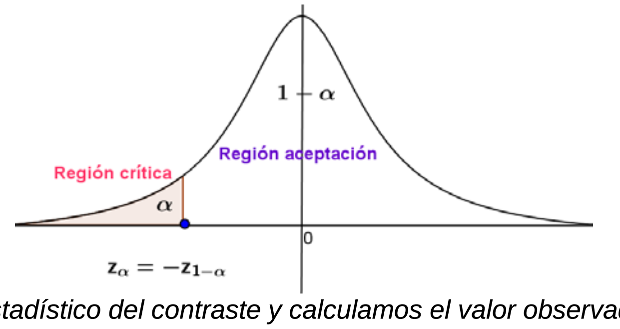
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \geq 0'75$ (por lo menos el 75% tienen calefacción) y $H_1 : p_0 < 0'75$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha =$ $= -z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = -z_{1-\alpha} = -2'33$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el

valor observado del estadístico de prueba será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \dfrac{0'5333 - 0'75}{\sqrt{\dfrac{0'75 \cdot 0'25}{135}}} \cong -5'814$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -5'814$ está a la izquierda del **valor crítico** $z_\alpha =$ $= -z_{1-\alpha} = -2'33$, nos encontramos en la región de rechazo.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: $p_0 \geq 0'75$, y aceptamos la hipótesis alternativa $H_1 : p_0 < 0'75$, en el nivel de significación α = 0'01.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 1%, afirmamos que menos del 75% de las casas tienen calefacción.

Ejercicio 10.

Una compañía textil afirma que a lo sumo el 20% del público compra ropa de lana. Verifica esta afirmación para α = 0,01 , si una encuesta aleatoria indica que 46 de 200 clientes compran ropa de lana.

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}\right)$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Una compañía textil afirma que a lo sumo el 20% del público compra ropa de lana. Me dicen que la hipótesis nula es H_0 : p_0 = 0'20. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: p_0 = 0'20; n = 200; $\hat{p}$ = 46/200 = 0'23; nivel significación = α = 0,01 = 1%

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

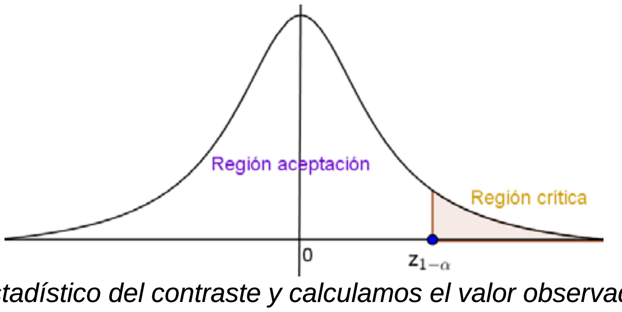
Las hipótesis nula y alternativa son: H_0 : $p_0 \leq$ 0'20 (compra menos del 20%) y H_1 : p_0 > 0'20, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'01 = 0'99, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y el valor más próximo es 0'9901 el cual corresponde al **valor crítico** es $z_{1-\alpha}$ = 2'33 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el

valor observado del estadístico de prueba será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = = \dfrac{0'23 - 0'2}{\sqrt{\dfrac{0'2 \cdot 0'8}{200}}} \cong 1'06$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 1'06 está a la izquierda del punto crítico 2'33, luego estamos en la zona de aceptación.

Resumiendo **aceptamos la hipótesis nula H_0: $p_0 \leq$ 0'20, para un nivel de significación α = 0'01.**

Con lo cual, se puede afirmar que menos del 20% compra ropa de lana.

Ejercicio 11.

Se sabe que la longitud en cm de una determinada especie de coleópteros sigue una distribución normal de varianza 0,25 cm^2. Capturados 6 ejemplares de dicha especie, sus longitudes (en cm) fueron:

2;75 1;72 2;91 2;6 2;64 3;34

¿Se puede aceptar la hipótesis de que la población tiene una longitud media de 2'656 cm? (Usar α = 0;05)

Solución

Sabemos que si tenemos una población que sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Trabaremos con la normal N(0,1).

También puede resolverse por la distribución muestral y es parecido a los intervalos.

Este problema nos plantea un contraste bilateral.

Datos dados: μ_0 = 2'656 cm, n = 6, Varianza = σ^2 = 0'25, luego σ = 0'5; nivel de significación = α = 0'05 y $\overline{x}$ = (2'75 + 1'72 + 2'91 + 2'6 + 2'64 + 3'34)/6 = 2'66 cm.

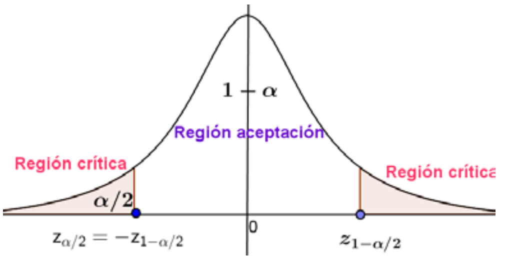
Dividimos el problema en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa

Las hipótesis son: H_0: μ_0 = 2'656 cm y H_1: $\mu_0 \neq$ 2'656 cm. Es contraste bilateral.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

La prueba es bilateral y para un nivel de significación α = 0'05, tenemos $\alpha/2$ = 0,05/2 = 0'025. De p($Z \leq z_{1-\alpha/2}$) = 1 - $\alpha/2$ = 1 – 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) obtenemos $z_{1-\alpha}$ = 1'96, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 1'96 y z_α = - $z_{1-\alpha}$ = -1'96, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es Z = $\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{2'66 - 2'656}{0'5/\sqrt{6}} \cong 0'019$

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 0'019 se encuentra en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar la aceptar hipótesis nula H_0**: μ_0 = 2'656 cm, a este nivel de significación.

En consecuencia, podemos aceptamos la hipótesis nula H_0 **y aceptar que la longitud media de los crustáceos es de 2'656 al nivel de significación 0'05**, pudiendo haber cometido un error del tipo I.

Ejercicio 12.

La edad de la población que vive en residencias de mayores en Cádiz sigue una distribución normal de desviación típica 7,3 años. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 50, y se obtiene una media muestral de 69 años. ¿Se puede asegurar que la edad media de la población que vive en residencias de mayores en Cádiz es mayor de 70 años con un nivel de significación del 5% ?

Solución

Del problema tenemos: μ_0 = 69 y σ = 7'3 ; n = 50; $\overline{x}$ = 20'5; de "la edad es mayor de 70 años con un nivel de significación del 5%", lo que están dando es la hipótesis alternativa tenemos H_1 : μ_0 > 70 a nivel de significación de α = 0,05. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* N(μ_0, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: *Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.*

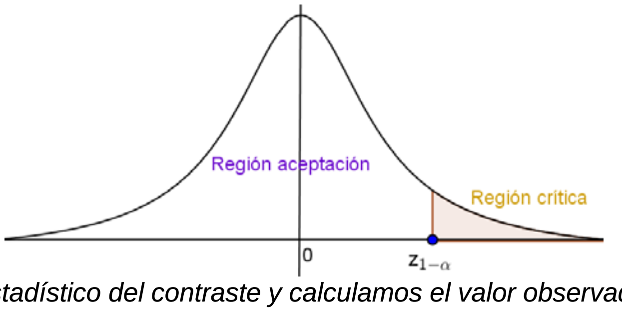
Las hipótesis nula y alternativa son: H_0 : $\mu_0 \le 70$ (contrastamos que la edad es menor o igual a 70 años) y H_1 : $\mu_0 > 70$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$ *.*

Etapa 2: *Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.*

Para el nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos 1 - α = 0,95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y uno de los valores más próximo es 0'9495 el cual corresponde con el **valor crítico** $z_{1-\alpha}$ = 1'64 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: *Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.*

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{69 - 70}{7'3/\sqrt{50}} \cong$ - 0'9686.

Etapa 5: *Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.*
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 0'9686 está a la izquierda del punto crítico 1'64, estamos en la zona de aceptación.

Resumiendo **aceptamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 70$, para un nivel de significación α = 0'05.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos la edad no supera los 70 años.

Ejercicio 13.

Para conocer la producción media de sus olivos, un olivarero escoge al azar 10 de ellos, pesa su producción de aceitunas, y obtiene los siguientes valores, expresados en kg: 175, 180, 210, 215, 186, 213, 190, 213, 184, 195. Sabemos que la producción sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15'3 kg. Con la información obtenida, ¿se puede asegurar que la producción media de un olivo de ese agricultor es menor de 200 kg? (Usar α = 0,05)

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Nos dice el problema que "¿se puede asegurar que la producción media de un olivo de ese agricultor es menor de 200 kg? (Usar α = 0,05)", al darme el nivel de confianza en la pregunta del contraste me están dando la hipótesis alternativa, es decir la hipótesis nula es lo contrario, es decir H_0 : $\mu_0 \ge 200$, a un nivel de significación del 5%, por tanto la hipótesis alternativa es H_1 : $\mu_0 < 200$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

Datos del problema: n = 10; $\overline{x}$ = (175+180+210+215+186+213+190+213+184+195)/10 = 196'1; μ_0 = 200; σ = 15'3; nivel significación= α = 0'05.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

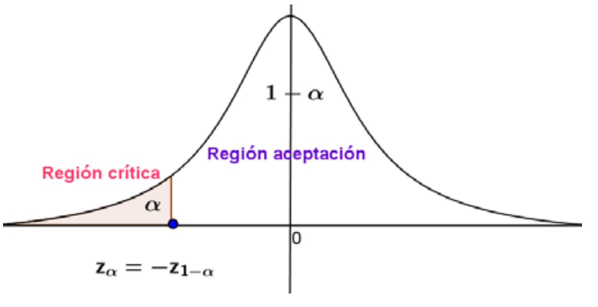
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 200$ (las aceitunas superan los 200 kg por olivo) y $H_1 : \mu_0 <$ 200, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos $1 - \alpha$ = 0,95.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9495, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 1'64 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{196'1 - 200}{15'2/\sqrt{10}} \cong$ - 0'806

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 0'806 es mayor que el **valor crítico** $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = = - 1'64, vemos que nos encontramos en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de la aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 200$.**

Con lo cual, al nivel de significación del 0,05 la media de kg de aceitunas por olivo supera los 200 kg.

Ejercicio 14.

El 40% de los escolares de cierto país suelen perder al menos un día de clase a causa de gripes y catarros. Sin embargo, un estudio sobre 1000 escolares revela que en el último curso hubo 450 en tales circunstancias. Las autoridades defienden que el porcentaje del 40% para toda la población de escolares se ha mantenido. Contrastar con un nivel de significación del 5% la hipótesis defendida por las autoridades sanitarias, frente a que el porcentaje ha aumentado, como parecen indicar los datos, explicando claramente a qué conclusión se llega.

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

De "La autoridades defienden que el 40% de los escolares falta un día por gripe se ha mantenido", tenemos $H_0 : p_0 \le 0'40$ a niveles de significación de $\alpha = 5\%$. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $p_0 = 0'40$; $n = 1000$; $\hat{p} = 450/1000 = 0'45$; nivel de significación $\alpha = 5\% = 0'05$.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

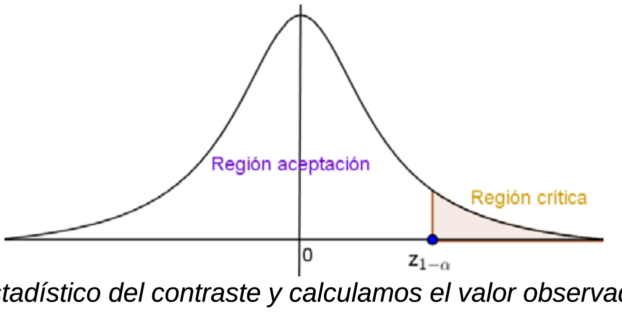
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \le 0'40$ (el porcentaje de alumnos que falta no supera el 40%) y $H_1 : p_0 > 0'40$, la cual *nos indica la dirección en el contraste unilateral*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico $z_{1-\alpha}$.*

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es $\alpha = 0'05$, luego tenemos $1 - \alpha = 0,95$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no viene dicha probabilidad y uno de los valores más próximos es 0'9495 que corresponde al **valor crítico** es $z_{1-\alpha} = 1'64$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el

valor observado del estadístico de prueba será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \dfrac{0'45 - 0'4}{\sqrt{\dfrac{0'4 \cdot 0'6}{1000}}} \cong 3'227$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = 3'227$ está a la derecha del punto crítico 1'64, estamos en la zona de rechazo.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: $p_0 \le 0'40$, y aceptamos la hipótesis alternativa $H_1 : p_0 > 0'40$, para un nivel de significación $\alpha = 0'05$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos que <u>mas del 40%</u> de los alumnos falta un día a clase por la gripe.

Ejercicio 15.

Una de las entradas a cierta ciudad andaluza sufría constantemente retenciones de tráfico, de forma que el tiempo de espera en la cola formada por el semáforo allí instalado seguía una distribución Normal de media 10 minutos y desviación típica 4 minutos. Con el fin de descongestionar ese punto y bajar la media de tiempo de espera, se habilitó una vía de acceso auxiliar. Transcurrida una semana se hizo un estudio sobre 36 vehículos y se obtuvo que el tiempo medio de espera en el citado semáforo fue de 8'5 minutos. Las autoridades municipales mostraron su satisfacción y dijeron que la medida había funcionado, pero la opinión

pública, sin embargo, defiende que la situación sigue igual. Suponiendo que la desviación típica se ha mantenido:
a) Plantee un test para contrastar la hipótesis defendida por la opinión pública frente a la de los responsables municipales. Si se concluye que la media de tiempo de espera bajó y realmente no lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?
b) ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5% ?
c) ¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 1% ?

Solución

a)
Plantee un test para contrastar la hipótesis defendida por la opinión pública frente a la de los responsables municipales. Si se concluye que la media de tiempo de espera bajó y realmente no lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

Sabemos:

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">SITUACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>H_0 verdadera</td><td>H_1 verdadera</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DECISIONES</td><td>Mantener H_0</td><td>Decisión correcta</td><td>Decisión incorrecta
Error de tipo II</td></tr>
<tr><td>Rechazar H_0</td><td>Decisión incorrecta
Error de tipo II</td><td>Decisión correcta</td></tr>
</table>

Leyendo el enunciado (a) si se diese esa situación estaríamos en un error de tipo I.

(a), (b) y (c)
Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Datos del problema: Tiempo de espera $\rightarrow$ N(10,4); μ_0 = 10; σ = 4; n = 36; $\overline{x}$ = 8'5; niveles de significación = = α = 5% = 0'05 y α = 1% = 0'01.

De "tiempo de espera de 10 minutos, autoridades 8'5 minutos y la opinión pública defiende que la situación sigue igual", tenemos $H_0 : \mu_0 \geq 10$. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1)*.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 10$ (la espera no han disminuido) y $H_1 : \mu_0 < 10$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

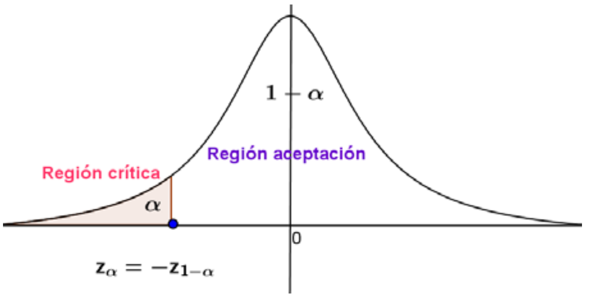
<u>Para el nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos 1 - α = 0,95.</u>

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no viene dicha probabilidad y uno de los valores más próximos es 0'9495 que corresponde al **valor crítico** es $-z_{1-\alpha}$ = <u>-1'64</u> que separa las zonas de aceptación y rechazo.

<u>Para el nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.</u>

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \underline{\alpha}$ = 1 – 0'01 = 0'99, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = <u>- 2'33</u> que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{8'5 - 10}{4/\sqrt{36}}$ - 2'25.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 2'25 está a la derecha dl **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 2'33 al nivel de significación del 1%, y a la izquierda del **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 1'64 al nivel de significación del 5%, vemos que nos encontramos en la región de rechazo al nivel de significación del 1%, y en la región de aceptación al nivel de significación del 5%. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 10$ al nivel del 1%, y de aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 10$ al nivel del 5%.**

Con lo cual se puede afirmar al nivel 0,01, que las autoridades llevan razón y el nivel de espera no supera los 10 minutos; sin embargo los conductores llevan razón y tiene que esperar más de 10 minutos al nivel 0'05.

Ejercicio 16.

En un hospital se observó que los pacientes abusaban del servicio de urgencias, de forma que un 30% de las consultas podían perfectamente haber esperado a concertar una cita con el médico de cabecera, porque no eran realmente urgencias. Puesto que esta situación ralentizaba el servicio, se realizó una campaña intensiva de concienciación. Transcurridos unos meses se ha recogido información de 120 consultas al servicio, de las cuales sólo 30 no eran realmente urgencias:
a) Hay personal del hospital que defiende que la campaña no ha mejorado la situación. Plantee un test para contrastar esta hipótesis frente a que si la mejoró. Si se concluye que la situación no ha mejorado y realmente sí lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?
b) ¿A qué conclusión se llega en el test planteado en el apartado anterior con un nivel de significación del 1%?

Solución

a) Hay personal del hospital que defiende que la campaña no ha mejorado la situación. Plantee un test para contrastar esta hipótesis frente a que si la mejoró. Si se concluye que la situación no ha mejorado y realmente sí lo hizo, ¿cómo se llama el error cometido?

Sabemos:

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">SITUACIÓN</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>H_0 verdadera</td><td>H_1 verdadera</td></tr>
<tr><td rowspan="2">DECISIONES</td><td>Mantener H_0</td><td>Decisión correcta</td><td>Decisión incorrecta Error de tipo II</td></tr>
<tr><td>Rechazar H_0</td><td>Decisión incorrecta Error de tipo II</td><td>Decisión correcta</td></tr>
</table>

Leyendo el enunciado (a) si se diese esa situación estaríamos en un error de tipo II.

b)

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.
Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Nos dice el problema "Hay personal del hospital que defiende que la campaña no ha mejorado la situación", es decir el porcentaje de personas que acude al Hospital supera el 30%, por tanto la hipótesis nula a contrastar es $H_0 : p_0 \geq 0'30$ a nivel de significación de $\alpha = 0,01$. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $p_0 = 0'30$; $n = 120$; $\hat{p} = 30/120 = 0'25$; región crítica = $\alpha = 0,01$.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

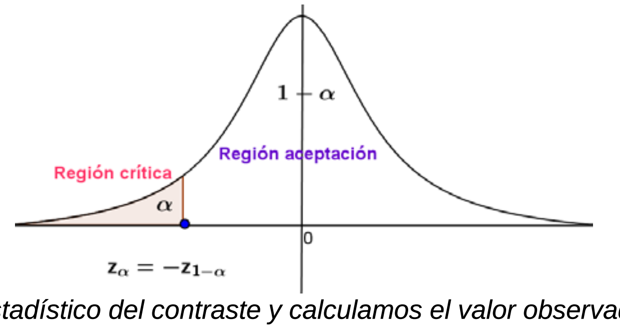
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \geq 0'30$ (acude a urgencias mas del 30%) y $H_1 : p_0 < 0'30$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es $\alpha = 0'01$, luego tenemos $1 - \alpha = 0,99$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = \underline{- 2'33}$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el

valor observado del estadístico de prueba será el número $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \frac{0'25 - 0'3}{\sqrt{\frac{0'3 \cdot 0'7}{120}}} \cong -1'195$.

Recordamos que los puntos críticos eran - 2'33, -2'81 y – 3'09

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -1'195$ está a la derecha del punto crítico -2'33, se encuentra en la región de aceptación.

Resumiendo **aceptamos la hipótesis nula H_0: $p_0 \geq 0'30$, al del nivel de significación $\alpha = 0'01$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 1%, afirmamos que por lo menos el 30% de

los pacientes siguen yendo a urgencias.

Ejercicio 17.

El alcalde de una ciudad prometió, en su programa electoral, oponerse a la construcción de una central de tratamiento de ciertos residuos, puesto que en aquel momento sólo un 10% de los ciudadanos estaban a favor de la central de tratamiento de residuos. En los últimos días se ha encuestado a 100 personas de las cuales 14 están a favor de la central. El alcalde afirma sin embargo que el porcentaje de ciudadanos a favor sigue siendo del 10% o incluso ha disminuido. ¿Tiene razón el alcalde con un nivel de significación del 2%?

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

De "sólo un 10% de los ciudadanos estaban a favor", tenemos $H_0 : p_0 \leq 0'10$. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $p_0 = 0'10$; n = 100; $\hat{p} = 14/100 = 0'14$; nivel de significación $\alpha = 2\% = 0,02$.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

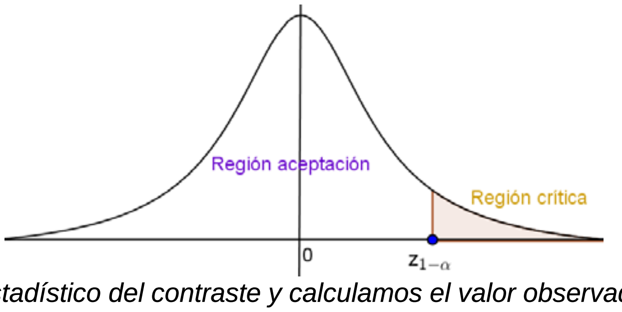
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \leq 0'10$ (sólo un 10% estaban a favor) y $H_1 : p_0 > 0'10$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es $\alpha = 0'02$, luego tenemos $1 - \alpha = 0,98$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'02 = 0'98$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no viene dicha probabilidad y que el valor mas próximo es 0'7798 y corresponde al **valor crítico** es $z_{1-\alpha} = 2'05$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el

valor observado del estadístico de prueba será el número $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \frac{0'14 - 0'1}{\sqrt{\frac{0'1 \cdot 0'9}{100}}} \cong 1'333$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = 1'333$ está a la izquierda del punto crítico 2'05, estamos en la zona de aceptación.

Resumiendo **aceptamos la hipótesis nula H_0: $p_0 \le 0'10$, para un nivel de significación $\alpha = 0'02$.**

Con lo cual, el alcalde acierta en que el porcentaje de ciudadanos a favor sigue siendo del 10% o incluso ha disminuido, para un nivel de significación $\alpha = 0'02$.

Ejercicio 18.

Se desea estudiar el gasto mensual de los teléfonos móviles, en euros, de los estudiantes universitarios andaluces. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 10 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para el gasto mensual en móvil:

30 60 25 20 25 30 35 45 50 40

Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y de desviación típica igual a 12 euros.
a) ¿Se puede asegurar que los estudiantes universitarios andaluces gastan menos de 50 euros mensuales en teléfono móvil? (Usar $\alpha = 0{,}01$)
b) ¿Cuál es la desviación típica de la media muestral?

Solución

(a) y (b)
Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Se desea estudiar el gasto mensual de los teléfonos móviles, en euros, de los estudiantes universitarios andaluces. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 10 de estos estudiantes, resultando los valores siguientes para el gasto mensual en móvil:

30 60 25 20 25 30 35 45 50 40

Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y de desviación típica igual a 12 euros.
a) ¿Se puede asegurar que los estudiantes universitarios andaluces gastan menos de 50 euros mensuales en teléfono móvil? (Usar $\alpha = 0{,}01$)
b) ¿Cuál es la desviación típica de la media muestral?

Datos del problema: n = 16; $\overline{x}$ = (30+60+25+20+25+30+35+45+50+40)/10 = 36; $\mu_0 = 50$; $\sigma = 12$; nivel de significación = $\alpha = 0{,}01 = 1\%$.

La desviación típica muestral es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{10}} \cong 3'7947$.

Nos dice el problema que "los estudiantes universitarios andaluces gastan menos de 50 euros mensuales con un nivel del 1%, luego es la hipótesis alternativa", es decir $H_0 : \mu_0 \ge 50$, con lo cual un nivel de significación del 1%, por tanto la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 50$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

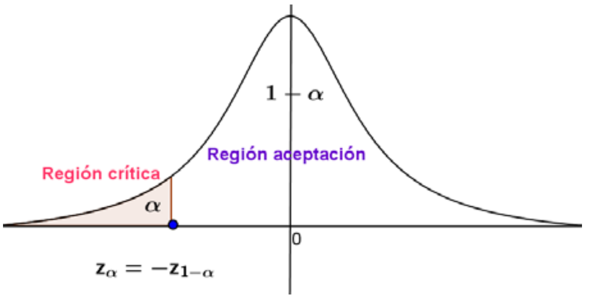
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \ge 50$ (gastan más de 50 €) y $H_1 : \mu_0 < 50$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es $\alpha = 0'01$, luego tenemos $1 - \alpha = 0{,}99$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - 2'33$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{36 - 50}{12/\sqrt{10}} \cong -3'689$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -3'689$ es menor que el **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha} = -2'33$, vemos que nos encontramos en la región de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de la rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 50$ y elegir la hipótesis alternativa H_1: $\mu_0 < 50$ a un nivel del 1%.**

Con lo cual, no se puede afirmar al nivel 0,01 que los estudiantes gastan menos de 50€ en el móvil.

Ejercicio 19.

Una máquina de envasado automático llena en cada saco una cierta cantidad de determinado producto. Se seleccionan 20 sacos, se pesa su contenido y se obtienen los siguientes resultados (en kilos):

49, 50, 49, 50, 50, 50, 49, 50, 50, 50, 49, 50, 50, 51, 52, 48, 50, 51, 51, 51

A partir de esta información y suponiendo que la variable, peso de cada saco, se distribuye normalmente con desviación típica 1 kg:
a) ¿Se puede admitir que el peso medio de los sacos que llena la máquina es de aproximadamente 51 kg? (Usar α =0,01)
b) ¿Se puede admitir que el peso medio de los sacos que llena la máquina es menor de 50 kg? (Usar α=0,05)

Solución

Resolvemos el apartado(a) y (b) a la vez
Sabemos que si tenemos una población que sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.
Trabaremos con la normal N(0,1).
También puede resolverse por la distribución muestral y es parecido a los intervalos.

Este problema nos plantea un contraste bilateral.

Datos dados: $\mu_0 = 51$kg, n = 20, Desv. Típica = σ = 1; nivel de significación = α = 0'01 y también α = 0'05;
$\overline{x}$ = (49+50+49+50+50+50+49+50+50+50+49+50+50+51+52+48+50+51+51+51)/20 = 50 kg.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

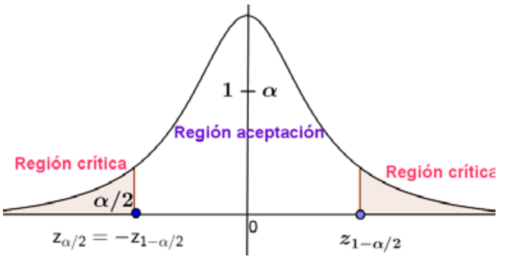
Las hipótesis son: H_0: $\mu_0 = 51$ kg y H_1: $\mu_0 \neq 51$ kg. Es contraste bilateral.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para un nivel de significación α = 0'01, tenemos α/2 = 0,01/2 = 0'025. De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 =$

= 1 – 0'005 = 0'995, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que no viene. Uno de las probabilidades mas próximas es 0'9949 y obtenemos $z_{1-\alpha}$ = 2'57, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 2'57 y z_α = - $z_{1-\alpha}$ = -2'57, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.

Para un nivel de significación α = 0'05, tenemos $\alpha/2$ = 0,05/2 = 0'025. De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 – 0'025 = = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) obtenemos $z_{1-\alpha}$ = 1'96, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 1'96 y z_α = - $z_{1-\alpha}$ = -1'96, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{50 - 51}{1/\sqrt{20}} \cong -4'4721$

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -4'4721 se encuentra en la región de rechazo para ambos niveles de significación. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la aceptar hipótesis nula H_0: μ_0 = 51, y aceptar la hipótesis alternativa H_0: $\mu_0 \neq$ 51**, a esos niveles de significación.

En consecuencia, no podemos aceptamos la hipótesis nula H_0 **y aceptamos la alternativa que el peso de la máquina de envasado no es de 51 kg a ambos niveles de significación 0'01 y 0'05**.

Ejercicio 20.

El consumo de cierto producto sigue una distribución normal con varianza 300. A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 180.

a) Halle un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo.
b) ¿Se podría afirmar que el consumo medio de este producto no llega a 200? (Usar α =0,05)

Solución

a)
Halle un intervalo de confianza al 95% para la media del consumo.

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una normal N(μ, σ), la *distribución muestral de medias* $\overline{X}$ sigue una normal N(μ, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$).
Sabemos que el *intervalo de confianza para estimar la media* es:

$$I(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$, que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$

El consumo de cierto producto sigue una distribución normal con varianza 300. A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 180.

Datos del problema: Varianza = σ^2 = 300, de donde $\sigma = \sqrt{300} \cong 17'3205$; n = 25; $\overline{x}$ = 180; nivel de confianza = 1 - α = 95% = 0'95, de donde α = 1 – 0'95 = 0'05 con lo cual $\alpha/2$ = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que aparece en las tablas, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$.

El intervalo pedido es $I(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(180 - 1'96\cdot\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{25}}, 180 + 1'96\cdot\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{25}}\right) \cong$

$\cong$ (173'21036; 186'7896)

b)
¿Se podría afirmar que el consumo medio de este producto no llega a 200? (Usar α = 0,05)

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\bar{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Datos del problema: Varianza = σ^2 = 300, de donde $\sigma = \sqrt{300} \cong 17'3205$; n = 25; $\bar{x}$ = 180; nivel de significación = α = 5% = 0'05.

Nos dice el problema que "el consumo no llega a 200 con α = 0,05". Me están dando la hipótesis alternativa, es decir la hipótesis nula es $H_0 : \mu_0 \ge 200$, con lo cual un nivel de significación del 5%, y la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 200$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

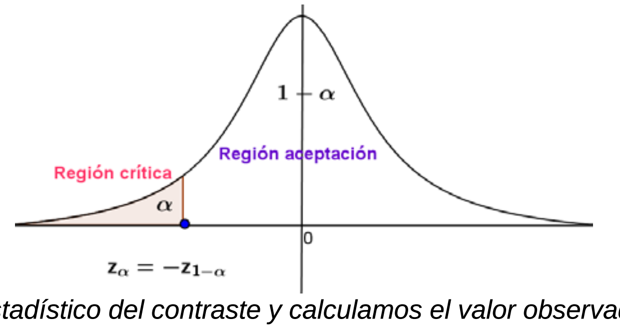
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \ge 200$ (El consumo pasa o es igual a 200) y $H_1 : \mu_0 < 200$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* z_α = = - $z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos 1 - α = 0,95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. Uno de los valores más próximo es 0'9495, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - 1'64$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{180 - 200}{\sqrt{300}/\sqrt{25}} \cong$ -5'7735.

$\cong$ - 0'4243

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 5'7735 está a la izquierda del **valor crítico** z_α= = - $z_{1-\alpha}$ = - 1'64, vemos que nos encontramos en la región de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de la rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 200$ y aceptamos la hipótesis alternativa H_1: $\mu_0 < 200$ a un nivel de significación del 5%.**

Con lo cual, se puede afirmar al nivel 0,05, que el consumo del producto no llega a los 200.

Ejercicio 21.

Los estudiantes universitarios de cierto país dedican al estudio un número de horas semanales que sigue una distribución normal de media desconocida y de desviación típica 7 horas. Si en una muestra de 200 estudiantes se obtuvo una media muestral de 30 horas de estudio semanal.
a) Halle un intervalo de confianza al 95% para el número de horas de estudio semanales de los estudiantes universitarios de dicho país.
b) ¿Se podría afirmar que los estudiantes universitarios de ese país estudian menos de 35 horas semanales? (Usar α =0,01)

Solución

a)
Halle un intervalo de confianza al 95% para el número de horas de estudio semanales de los estudiantes universitarios de dicho país.

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una normal N(μ, σ), la *distribución muestral de medias* $\overline{X}$ sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Sabemos que el *intervalo de confianza para estimar la media* es: $I(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$, que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$

Los estudiantes universitarios de cierto país dedican al estudio un número de horas semanales que sigue una distribución normal de media desconocida y de desviación típica 7 horas. Si en una muestra de 200 estudiantes se obtuvo una media muestral de 30 horas de estudio semanal.

Datos del problema: σ = 7; n = 200; $\overline{x}$ = 30; nivel de confianza = 1 - α = 95% = 0'95, de donde α = 1 – 0'95 = 0'05 con lo cual α/2 = 0'025.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 – 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que aparece en las tablas, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.
El intervalo pedido es $I(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(30 - 1'96 \cdot \frac{7}{\sqrt{200}}, 30 + 1'96 \cdot \frac{7}{\sqrt{200}}\right) \cong$

≅ (29'0298; 30'9701)

b)
¿Se podría afirmar que los estudiantes universitarios de ese país estudian menos de 35 horas semanales? (Usar α =0,01)

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Datos del problema: σ = 7; n = 200; $\overline{x}$ = 30; μ_0 = 35; nivel de significación = α = 1% = 0'01.

Nos dice el problema que "se podría afirmar que estudian menos de 35 horas con α = 0,01". Me están dando la hipótesis alternativa H_1, es decir la hipótesis nula es $H_0 : \mu_0 \geq 35$, con lo cual un nivel de significación del 1%, y la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 35$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

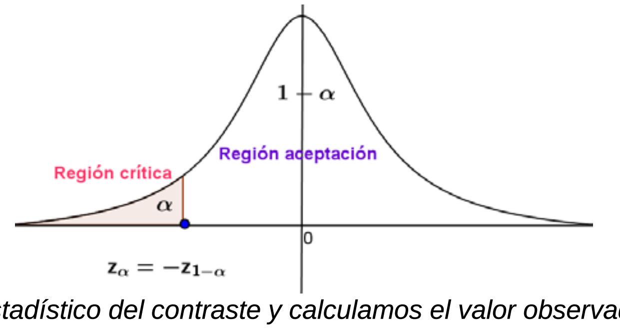
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 35$ y $H_1 : \mu_0 < 35$ (estudian menos de 35 horas con α=0,01), la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = = -z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'01 = 0'99, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. Uno de los valores más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 2'33 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{30 - 35}{7/\sqrt{200}} \cong$ -10'1015.

$\cong$ - 0'4243

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 10'1015 está a la izquierda del **valor crítico** $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 2'33, vemos que nos encontramos en la región de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de la rechazar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 35$ y aceptamos la hipótesis alternativa H_1: $\mu_0 < 35$ a un nivel de significación del 1%.**

Con lo cual, se puede afirmar al nivel 0'01, los estudiantes estudian menos de 35 horas semanales.

Ejercicio 22.

La talla de los individuos de una población sigue una distribución normal de desviación típica 8 cm. Se han determinado las tallas de 25 individuos, encontrándose una media de 168 cm. ¿Se podría afirmar que la talla media de la población es menor de 170 cm? (Usar α = 0,03)

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Datos del problema: σ = 8; n = 25; $\overline{x}$ = 168; μ_0 = 170; nivel de significación = α = 3% = 0'3.

Nos dice el problema que "se podría afirmar que la talla media 170 cm con α = 0,03". Me están dando la hipótesis alternativa H_1, es decir la hipótesis nula es $H_0 : \mu_0 \geq 170$, con lo cual un nivel de significación del 3%, y la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 170$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

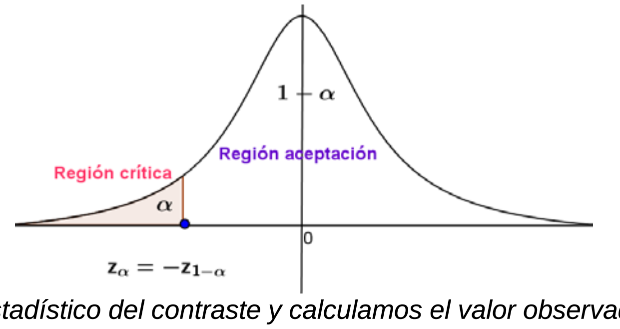
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 170$ y $H_1 : \mu_0 < 170$ (miden menos de 170 cm. con α=0,03), la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha =$ $= - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'03, luego tenemos 1 - α = 0,97.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'03 = 0'97, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. Uno de los valores más próximo es 0'9699, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 1'88 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{168 - 170}{8/\sqrt{25}} \cong$ -1'25.

$\cong$ - 0'4243

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 1'25 está a la derecha del **valor crítico** z_α= = - $z_{1-\alpha}$ = - 1'88, vemos que nos encontramos en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 170$ a un nivel de significación del 3%.**

Con lo cual, se puede afirmar al nivel 0'03, los estudiantes miden 170 cm. ó más.

Ejercicio 23.

Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica 3 horas. A partir de una muestra aleatoria de tamaño 30 se ha obtenido una media igual a 7 horas. ¿Se podría afirmar que el número medio de horas de sueño de los estudiantes de Bachillerato de dicha comunidad autónoma es mayor de 6 horas? (Usar α = 0,04)

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de medias sigue también una distribución normal:* $N(\mu_0, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

Los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley normal de media desconocida y desviación típica 3 horas. A partir de una muestra aleatoria de tamaño 30 se ha obtenido una media igual a 7 horas. ¿Se podría afirmar que el número medio de horas de sueño de los estudiantes de Bachillerato de dicha comunidad autónoma es mayor de 6 horas? (Usar α = 0,04)

Del problema tenemos: $\sigma = 3$; $n = 30$; $\mu_0 = 6$; $\bar{x} = 7$. De "horas de sueño mayor de 6 horas con $\alpha = 0{,}04$", lo que están dando es la hipótesis alternativa tenemos $H_1 : \mu_0 > 6$ a nivel de significación de $\alpha = 0{,}04$. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

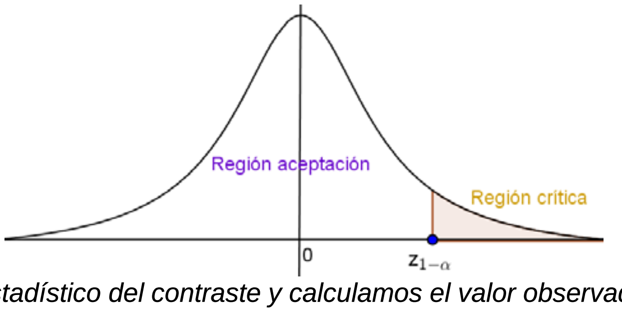
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \le 6$ y $H_1 : \mu_0 > 6$ (horas de sueño mayor de 6 horas con α=0,04), la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'04, luego tenemos $1 - \alpha$ = 0,96.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'04 = 0'96$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y uno de los valores más próximo es 0'9599 el cual corresponde con el **valor crítico** $z_{1-\alpha}$ = 1'75 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{7 - 6}{3/\sqrt{30}} \cong 1'8257$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 1'8257 está a la derecha del punto crítico 1'75, estamos en la zona de rechazo.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 6$, para un nivel de significación α = 0'04, y aceptamos la hipótesis alternativa H_1: $\mu_0 > 6$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 4%, afirmamos que los estudiantes duermen más de 6 horas.

Ejercicio 24.

Las autoridades educativas publican en un estudio que el 25% de los estudiantes de Bachillerato de una cierta comunidad autónoma tienen ordenador portátil. A partir de una muestra aleatoria de tamaño 300 se ha obtenido que sólo 70 de ellos tienen ordenador portátil. ¿Se podría asegurar que las autoridades dicen la verdad? (Usar α =0,06)

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: p_0 = 0'25; n = 300; $\hat{p}$ = 70/300 ≅ 0'2333; de "se podría asegurar que las autoridades dicen la verdad, es decir el 25% tienen ordenador con α = 0,06", me están diciendo que la hipótesis nula es H_0 : p_0 = 0'25 al nivel de significación de α = 0,06. *Es un contraste bilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

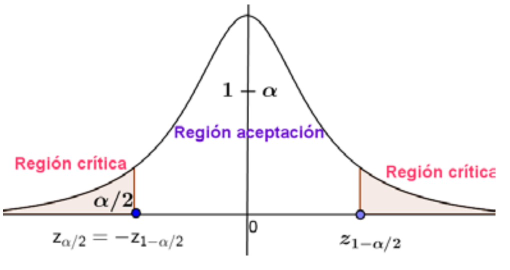
Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: p_0 = 0'25 y H_1: $p_0 \neq$ 0'25.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

La prueba es bilateral y para un nivel de significación α = 0'06, con lo cual $\alpha/2$ = 0,06/2 = 0'03.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 – 0'03 = 0'97, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que esta la probabilidad no viene, y que el valor más próximo es 0'9699. A esta probabilidad le corresponden los **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 1'88 y $z_{\alpha} = - z_{1-\alpha}$ = -1'88, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \dfrac{0'2333 - 0'25}{\sqrt{\dfrac{0'25 \cdot 0'75}{300}}} \cong$ - 0'668.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 0'668 **es mayor que el valor crítico** $z_{\alpha/2}$ = = -1'88, vemos que se encuentra en la zona de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar la aceptar la hipótesis nula H_0**: p_0 = 0'25, al nivel de significación α = 0,06.
En consecuencia, podemos **aceptamos** que al nivel α = 0,06 que **el 25% tiene un ordenador portátil en casa**, pudiendo haber cometido un error del tipo I.

Ejercicio 25.

Un laboratorio farmacéutico fabrica un producto para la caída del cabello que envasa en botes, y en el etiquetado indica que su contenido aproximado es de 100 cc. Se eligen, al azar, 7 de estos botes y se miden sus contenidos dando el siguiente resultado (en cc):

97 101 102 99 98 100 103

¿Podemos asegurar que la capacidad media de los botes que se fabrican es la indicada en el bote? (Usar α=0,01) (Se sabe que el contenido es una variable aleatoria normal de desviación típica 2 c.c.)

Solución

Resolvemos el apartado(a) y (b) a la vez
Sabemos que si tenemos una población que sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:*

$N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.
Trabaremos con la normal N(0,1).
También puede resolverse por la distribución muestral y es parecido a los intervalos.

Este problema nos plantea un contraste bilateral.

Datos dados: μ_0 = 100 cc, n = 7, Desv. Típica = σ = 2; nivel de significación = α = 0'01
$\overline{x}$ = (97 + 101 + 102 + 99 + 98 + 100 + 103)/7 = 100 cc.

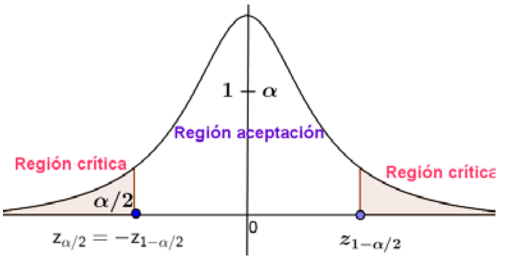
El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: μ_0 = 100 cc y H_1: $\mu_0 \neq$ 100 cc. Es contraste bilateral.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para un nivel de significación α = 0'01, tenemos $\alpha/2$ = 0,01/2 = 0'025. De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ =
= 1 – 0'005 = 0'995, mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que no viene. Uno de las probabilidades mas próximas es 0'9949 y obtenemos $z_{1-\alpha}$ = 2'57, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 2'57 y z_α = - $z_{1-\alpha}$ = -2'57, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{100 - 100}{2/\sqrt{7}}$ = 0.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 0 se encuentra en la región de aceptación para el nivel de significación 0'01, **tomamos la decisión de aceptr la aceptar hipótesis nula H_0**: **μ_0 = 100 cc** al esos nivel de significación de 0'01.

En consecuencia, **podemos aceptamos la hipótesis nula H_0 y que el contenido medio de los botes es de 100 cc, al nivel de significación 0'01**.

Ejercicio 26.

Se ha tomado una muestra de precios de un mismo producto en 16 comercios, elegidos al azar en una ciudad, y se han encontrado los siguientes precios (en euros):
95, 108, 97, 112, 99, 106, 105, 100, 99, 98, 104, 110, 107, 111, 103, 110.
Suponiendo que los precios de este producto se distribuyen según una ley normal de varianza 25 y media desconocida:
a) ¿Cuál es la distribución de la media muestral?
b) ¿Se puede afirmar que el precio medio de dicho producto es menor de 105 euros? (Usar α =0,03)

Solución

(a) y (b)
Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras

de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Datos del problema: $\overline{x}$ = (95+108+97+112+99+106+105+100+99+98+104+110+107+111+103+110)/16 = = 104; n = 16; varianza σ^2 = 25, de donde $\sigma = \sqrt{25}$ = 5; μ_0 = 105; nivel de significación = α = 3% = 0'3.

De los datos vemos que *la distribución muestral de medias sigue una distribución normal de media desconocida(en el problema se puede sustituir por la media muestral) y desviación típica* $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}$ = = 1'25.

Nos dice el problema que "se puede afirmar que el precio medio es menor de 105 euros con α = 0,03". Me están dando la hipótesis alternativa H_1, es decir la hipótesis nula es $H_0 : \mu_0 \geq 105$, con un nivel de significación del 3%, y la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 105$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

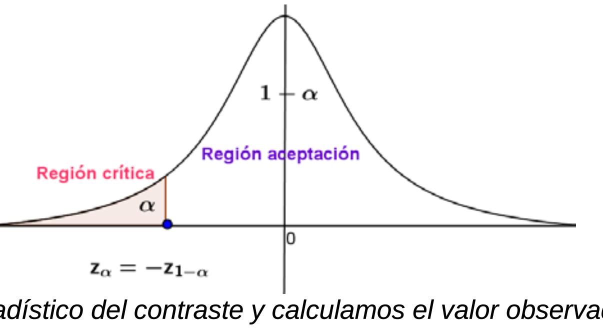
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 105$ y $H_1 : \mu_0 < 105$ (precio menor de 105 con α = 0,03), la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* z_α = = - $z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'03, luego tenemos 1 - α = 0,97.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'03 = 0'97, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. Uno de los valores más próximo es 0'9699, que corresponde al **valor crítico** es z_α = - $z_{1-\alpha}$ = - 1'88 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{104 - 105}{8/\sqrt{25}}$ = -1/1'25 = -0'8.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 0'8 está a la derecha del **valor crítico** z_α= = - $z_{1-\alpha}$ = - 1'88, vemos que nos encontramos en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 105$ a un nivel de significación del 3%.**

Con lo cual, se puede afirmar al nivel 0'03, que el precio del producto es mayor o 1gual de 105 €.

Ejercicio 27.

Relación de Ejercicios de Contrastes de Hipótesis. Ponencia Andaluza de Matemáticas Aplicadas a las CCSS II del año 2009.

Los alumnos de preescolar de Andalucía tienen una estatura que es una variable aleatoria de media desconocida y desviación típica 16 cm. Si seleccionamos una muestra aleatoria de 100 de tales alumnos y obtenemos una estatura media de 95 cm,
a) ¿se puede afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es menor de 95 cm? (Usar α = 0,01)
b) ¿se puede afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es mayor de 100 cm? (Usar α = 0,05)

Solución

(a)
¿se puede afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es menor de 95 cm? (Usar α = 0,01)

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal N(μ,σ) y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Datos del problema: σ = 16; n = 100; $\overline{x}$ = 95; nivel de significación = α = 0'01 = 1%.

Nos dice el problema que "se puede afirmar que la estatura media es menor de 95 cm. con α = 0,01". Me están dando la hipótesis alternativa H_1, es decir la hipótesis nula es $H_0 : \mu_0 \geq 95$, con un nivel de significación del 1%, y la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 95$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

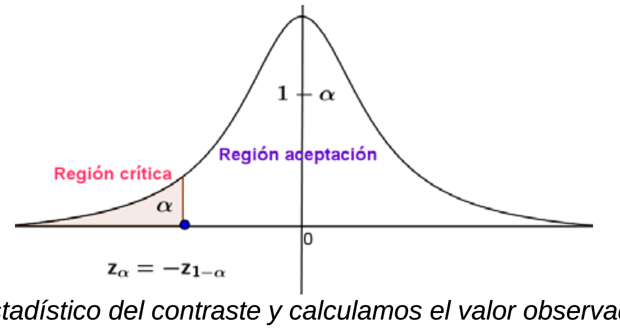
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 95$ y $H_1 : \mu_0 < 95$ (estatura menor de 95 con α = 0,01), la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* z_α = = $- z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

El nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'01 = 0'99, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. Uno de los valores más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 2'33 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{95 - 95}{16/\sqrt{100}} = 0$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = 0$ está a la derecha del **valor crítico** z_α=

$= - z_{1-\alpha} = - 2'33$, vemos que nos encontramos en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 95$ a un nivel de significación del 1%.**

Con lo cual, se puede afirmar al nivel 0'01, que miden igual o más de 95 cm.

b)
¿se puede afirmar que la estatura media de los alumnos de preescolar de Andalucía es mayor de 100 cm? (Usar $\alpha = 0,05$)
Datos del problema: $\sigma = 16$; $n = 100$; $\bar{x} = 95$; nivel de significación = $\alpha = 0'05 = 5\%$.

Nos dice el problema que "se puede afirmar que la estatura media es mayor de 100 cm. con $\alpha = 0,05$". Me están dando la hipótesis alternativa H_1, es decir la hipótesis nula es $H_0 : \mu_0 \leq 100$, con un nivel de significación del 5%, y la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 > 100$. Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

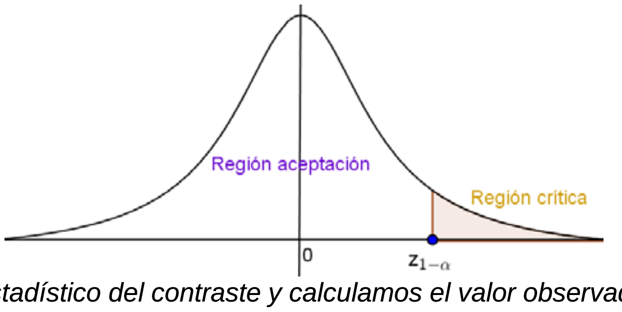
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \leq 100$ y $H_1 : \mu_0 > 100$ (se puede afirmar que la estatura media es mayor de 100 cm. con $\alpha = 0,05$), la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico $z_{1-\alpha}$.*

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es $\alpha = 0'05$, luego tenemos $1 - \alpha = 0,95$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y uno de los valores más próximo es 0'9495 el cual corresponde con el **valor crítico** $z_{1-\alpha} = 1'64$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{95 - 100}{16/\sqrt{100}} = -3'125$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -3'125$ está a la izquierda del punto crítico 1'64, estamos en la zona de aceptación.

Resumiendo **aceptamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \leq 95$, para un nivel de significación $\alpha = 0'05$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos que los estudiantes miden igual o menor de 95 cm.