MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II **CURSO 2008-2009**

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1'5 puntos) En un comercio de bricolaje se venden listones de madera de tres longitudes: 0'90 m, 1'50 m y 2'40 m, cuyos precios respectivos son 4 euros, 6 euros y 10 euros. Un cliente ha comprado 19 listones, con una longitud total de 30 m, que le han costado 126 euros en total.
Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para determinar cuántos listones de cada longitud ha comprado este cliente.
b) (1'5 puntos) Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible:

$$\begin{array}{c} 3x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 18 \\ x - 3z = 0 \end{array}.$$

Solución

a)
En un comercio de bricolaje se venden listones de madera de tres longitudes: 0'90 m, 1'50 m y 2'40 m, cuyos precios respectivos son 4 euros, 6 euros y 10 euros. Un cliente ha comprado 19 listones, con una longitud total de 30 m, que le han costado 126 euros en total.

Llamamos "x" al nº de listones comprados de longitud 0'90 m.
Llamamos "y" al nº de listones comprados de longitud 1'50 m.
Llamamos "z" al nº de listones comprados de longitud 2'40 m.

De "ha comprado 19 listones", tenemos la ecuación "x + y + z = 19"
De "con una longitud total de 30 m", tenemos la ecuación "0'9x + 1'5y + 2'4z = 30"
De "le han costado 126 euros en total", tenemos la ecuación "4x + 6y + 10z = 126"

El sistema pedido es

$$\begin{array}{c} x + y + z = 19 \\ 0'9x + 1'5y + 2'4z = 30 \\ 4x + 6y + 10z = 126 \end{array}$$

Aunque no lo piden la solución del sistema es: x = 8, y = 4 y z = 7.

b)
Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo, si es posible:

$$\begin{array}{c} 3x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + z = 18 \\ x - 3z = 0 \end{array}.$$

Pasamos a su matriz asociada, pero ponemos la tercera ecuación como la primera (la "x" va multiplicada por 1), y le aplicamos las transformaciones elementales de Gauss por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2-3.F_1 \\ F_3-2.F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3-2.F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right)$$

El sistema asociado es $\begin{cases} x \quad -3z = 0 \\ \quad -y \quad +8z = 0 \\ \quad\quad -9z = 18 \end{cases}$. Como hemos obtenido un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, tenemos un sistema compatible y determinado, es decir tiene solución única. La calculamos.
De la tercera ecuación tenemos "-9z = 18", de donde z = -2.
Entrando con z = -2 en la 2ª ecuación tenemos "–y +8(-2) = 0", de donde y = -16.
Entrando con z = -2 e y = -16 en la 1ª ecuación tenemos "x – 3(-2) = 0", de donde x = -6.
La solución pedida es (x,y,z) = (-6,-16,-2)

EJERCICIO 2

a) (1'5 puntos) Halle las funciones derivadas de las funciones definidas por las siguientes expresiones:

$$f(x) = (2x^2 - 3)^2; \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}; \quad h(x) = x.e^{3x}.$$

b) (1'5 puntos) Determine el dominio y las asíntotas de la función $m(x) = \frac{2x+3}{x-4}$.

Solución

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$;

$(f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x))$; $(e^{kx})' = k.e^{kx}$.; $(k)' = 0$.

a)

Halle las funciones derivadas de las funciones definidas por las siguientes expresiones:

De $f(x) = (2x^2 -3)^2$; tenemos $f'(x) = 2.(2x^2-3)^1.(2x) = 4x^2(2x^2-3) = 8x^4 - 12x^2$.

De $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; tenemos $g'(x) = \frac{(1/x).x-\ln(x).1}{(x)^2} = \frac{1-\ln(x)}{(x)^2}$;

De $h(x) = x.e^{3x}$; tenemos $h'(x) = 1.e^{3x};+ x.e^{3x}.(3) = e^{3x}(1 + 3x)$.

EJERCICIO 3

Parte I

Lena y Adrián son aficionados al tiro con arco. Lena da en el blanco con probabilidad 7/11 y Adrián con probabilidad 9/13. Si ambos sucesos son independientes, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) (0'6 puntos) "Ambos dan en el blanco".

b) (0'6 puntos) "Sólo Lena da en el blanco".

e) (0'8 puntos) "Al menos uno da en el blanco".

Solución

a)

"Ambos dan en el blanco".

Llamemos L y A, a los sucesos siguientes, "Lena da en el blanco" y "Adrian da en el blanco", respectivamente.

Me dicen que Lena da en el blanco con probabilidad 7/11, ,luego p(L) = 7/11.

Me dicen que Adrian da en el blanco con probabilidad 9/13, ,luego p(A) = 9/13.

Los sucesos L y A son independientes ($p(L\cap A) = p(L).p(A)$), porque la probabilidad de acertar en el blanco de Lena no tiene nada que ver con la probabilidad de acertar en el blanco de Adrian.

p("Ambos dan en el blanco") = $p(L \text{ y } A) = p(L\cap A) = p(L).p(A) = (7/11).(9/13) = 63/143 \cong 0'44056$.

b)

"Sólo Lena da en el blanco".

p("Sólo Lena da en el blanco ") = $p(L \text{ y no} A) = p(L\cap A^C) = p(L - A) = p(L) - p(L\cap A) = (7/11) - (63/143) =$
$=28/143 \cong 0'1958$.

e)

"Al menos uno da en el blanco".

p("Al menos uno da en el blanco ") = $p(L \text{ ó } A) = p(L\cup A) = p(L) + p(A) - p(L\cap A) = (7/11)+(9/13)-(63/143) =$
$=127/143 \cong 0'888$.

EJERCICIO 3

Parte II

En una muestra aleatoria de 100 individuos se ha obtenido, para la edad, una media de 17'5 años. Se sabe que la edad en la población, de la que procede esa muestra, sigue una distribución Normal con una desviación típica de 0'8 años.

a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 94%, para la edad media de la población.

b) (0'5 puntos) ¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior?

Solución

Sabemos que si tenemos una población con distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Sabemos que un *parámetro* es un valor numérico que describe una característica de la población (**μ**, **p**, $\boldsymbol{\sigma^2}$, etc. Es decir la media, la proporción, la varianza, ….).

Sabemos que para la media poblacional **μ** el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C=\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media.

a)
Obtenga un intervalo de confianza, al 94%, para la edad media de la población.
Datos del problema n = 100, $\overline{X}$= 17'5, σ = 0'8 y nivel de confianza = 1 - α = 94% = 0'94, de donde α = 0'06.

Como α = 1- 0'94 = 0'06, tenemos α/2 = 0'06/2 = 0'03
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'03 = 0'97. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'97 no viene en la tabla, y que el valor más próximo es 0'9699 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'9699}$ = 1'88, por tanto el intervalo de confianza pedido para la media μ es:

$$I.C=\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(17'5-1'88\cdot\frac{0'8}{\sqrt{100}},17'5+1'88\cdot\frac{0'8}{\sqrt{100}}\right) = (17'3496,\ 17'6504)$$

b)
¿Qué error máximo se comete en la estimación anterior?
De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos E = 1'88.(0'8/10) = 0'1504.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

En un examen de Matemáticas se propone el siguiente problema:
"Indique dónde se alcanza el mínimo de la función F(x, y) = 6x + 3y -2 en la región determinada por las restricciones 2x + y ≥ 6; 2x + 5y ≤ 30; 2x -y ≤ 6."
a) (2'5 puntos) Resuelva el problema.
b) (0'5 puntos) Ana responde que se alcanza en (1,4) y Benito que lo hace en (3,0). ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en (1,4)? ¿Es cierto que se alcanza en (3,0)?

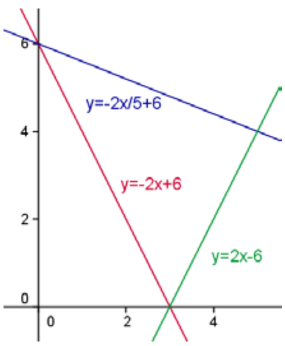
Solución

(a)

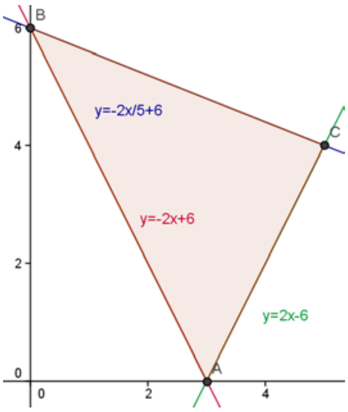
Primeramente transformamos las desigualdades "2x + y ≥ 6; 2x + 5y ≤ 30; 2x -y ≤ 6"en igualdades, y ya su gráfica es una recta,

2x + y = 6; 2x + 5y = 30; 2x -y = 6,

Despejamos a "y", y dibujamos las rectas correspondientes: y = -2x+6; y = -2x/5+ 6; y = 2x -6.



Fijándonos en las desigualdades: y ≥ -2x+6; y ≤ -2x/5+ 6; y ≥ 2x -6, el recinto pedido y sus vértices A, B y C son:



Calculamos los vértices resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos:
y = -2x+6; y = -2x/5+ 6; y = 2x -6

De y=2x-6 e y= -2x+6, tenemos 2x-6 = -2x+6, de donde 4x = 12, luego x = 3 e y = 0, y el punto de corte es A(3,0).
De y= -2x/5 + 6 e y= -2x+6, tenemos -2x/5 + 6 = -2x+6, de donde -2x +30 = -10x +30, luego 8x = 2, por tanto x = 0 e y = 6, y el punto de corte es B(0,6).
De y= -2x/5 + 6 e y= 2x-6, tenemos -2x/5 + 6 = 2x-6, de donde -2x +30 = 10x -30, luego 12x = 60, por tanto x = 5 e y = 4, y el punto de corte es C(5,4).
Los vértices de la región son A(3,0), B(0,6) y C(5,4).

Consideremos la función F(x,y) = 6x + 3y -2.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal, afirma que la función F alcanza máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe está situado en algún vértice del recinto (si coincide en dos vértices consecutivos, la solución es todo el segmento que los une), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(3,0) = 6(3) + 3(0) -2 = 16, F(0,6)= 6(0) + 3(6) -2 = 16, F(5,4) = 6(5) + 3(4) -2 = 40.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos el mínimo absoluto de la función F en la región es 16 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en los puntos (3, 0) y (0,6), por tanto el mínimo se alcanza en todo el segmento que une los puntos (3, 0) y (0,6).
b)
Ana responde que se alcanza en (1,4) y Benito que lo hace en (3,0). ¿Es cierto que el mínimo se alcanza en (1,4)? ¿Es cierto que se alcanza en (3,0)?
El mínimo se alcanza en el segmento (3, 0) y (0,6), el cual es un trozo de la recta y = -2x+6
Como el punto (1,4) pertenece a la recta y = -2x+6 en el segmento (3, 0) y (0,6), luego Ana lleva razón.
Benito también lleva razón porque (3,0) es uno de los vértices de la solución.
Si es cierto que se alcanza en el (3,0), pero también en todo el segmento (3, 0) y (0,6).

EJERCICIO 2

(a) (1'5 puntos) Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$. Estudie su continuidad y su derivabilidad.

(b) (1'5 puntos) Se consideran las funciones: $g(x) = (2x + 1)^3$, $h(x) = \dfrac{x-1}{2^x}$. Halle sus funciones derivadas.

Solución

(a)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$. Estudie su continuidad y su derivabilidad.

Si x < 0, f(x) = 1 – 2x que es continua y derivable en todo R, en particular en x < 0.

Si x > 0, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, que es continua y derivable en R – {soluciones de x+1=0} = R-{-1}, en particular en x > 0.

Falta ver la continuidad y derivabilidad en x = 0.

f(x) es continua en x = 0 si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0) = 1-2(0) = 1$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1-2x) = 1-2(0) = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1/1 = 1$. Como los tres valores **son iguales**, la función f(x) **es continua en x = 0**.

$f(x) = \begin{cases} 1-2x & \text{si } x \le 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x>0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{-1}{(x+1)^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$.

f(x) es derivable en x = 0 si $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$. (Estamos viendo la continuidad de la derivada).

$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (-2) = -2$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{(x+1)^2} = -1/1 = -1$. Como $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -2 \neq -1 = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, la función f(x) **no es derivable en x = 0.**

(b)

Se consideran las funciones: $g(x) = (2x + 1)^3$, $h(x) = \frac{x-1}{2^x}$. Halle sus funciones derivadas.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $(f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x))$; $(a^x)' = a^x.\ln(a)$; $(k)' = 0$.

De $g(x) = (2x + 1)^3$, tenemos $g'(x) = 3(2x+1)^2.(2) = 6(2x+1)^2$.

De $h(x) = \frac{x-1}{2^x}$, tenemos $h'(x) = \frac{1.(2^x)-(x-1)(2^x.\ln(2))}{\left(2^x\right)^2} = \frac{(2^x)[1- (x+1).\ln(2)]}{2^{2x}}$.

EJERCICIO 3

Parte I

Una encuesta realizada por un banco muestra que el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, el 50% tiene un préstamo personal y el 20% tiene un préstamo de cada tipo. Se elige, al azar, un cliente de ese banco.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario, sabiendo que no tiene un préstamo personal.

Solución

Llamemos H y P a los sucesos siguientes, "préstamo hipotecario" y "préstamo personal", respectivamente.

De, el 60% de sus clientes tiene un préstamo hipotecario, tenemos p(H) = 60% = 0'6.

De, el 50% de sus clientes tiene un préstamo personal, tenemos p(P) = 50% = 0'5.

De, el 20% tiene un préstamo de cada tipo, tenemos $p(H \text{ y } P) = p(H\cap P) = 20\% = 0'2$.

a)

Calcule la probabilidad de que no tenga ninguno de los dos préstamos.

Me están pidiendo $p(\text{noH y noP}) = p(H^C\cap P^C) = \{\text{Morgan}\} = p((H\cup P)^C) = \{\text{suceso contrario}\} = 1 - p(H\cup P)=$ **

Me falta $p(H\cup P) = p(H)+ p(P)- p(H\cap P) = 0'6+0'5-0'2 = 0'9$

= ** = 1-0'9 = 0'1.

b)

Calcule la probabilidad de que tenga un préstamo hipotecario, sabiendo que no tiene un préstamo personal.

Me están pidiendo $p(H/\text{noP}) = p(H/P^C) = \frac{p(H\cap P^C)}{p(P^C)} = \frac{p(H) - p(H\cap P)}{1 - p(P)} = 0'4/0'5 = 4/5 = 0'8$.

EJERCICIO 3

Parte II

El cociente intelectual de los alumnos de un centro educativo se distribuye según una ley Normal de media 110 y desviación típica 15. Se extrae una muestra aleatoria simple de 25 alumnos.

a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la media del cociente intelectual de los alumnos de esa muestra sea superior a 113?

b) (0'5 puntos) Razone cómo se vería afectada la respuesta a la pregunta anterior si el tamaño de la muestra aumentase.

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una normal $N(\mu, \sigma)$, la distribución muestral de medias

$\overline{X}$ sigue una normal N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Datos: X sigue una normal N(110, 15), luego μ = 110 = $\overline{x}$ y σ = 15; n = 25

Me están pidiendo p($\overline{X}$ >113) = { tipifico Z = $\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ } = p(Z > $\frac{113-110}{15/\sqrt{25}}$) = p(Z > 1) = 1 - p(Z ≤ 1) = {mirando en las tablas de la N(0'1) } = 1 – 0'8413 = 0'1547.

b)

Razone cómo se vería afectada la respuesta a la pregunta anterior si el tamaño de la muestra aumentase.

Si nos fijamos en la expresión "{ tipifico Z = $\frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ } = p(Z > 1)", y aumentase el tamaño de "n", el número "1"de p(Z < "1") aumentaría, y aumentaría p(Z < "nº nuevo), con lo cual como estamos calculando la probabilidad del contrario, **la probabilidad que me están pidiendo disminuiría**.