

MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2009 (MODELO 3) SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**OPCIÓN A****EJERCICIO 1**

Sea la igualdad $A \cdot X + B = A$, donde A , X y B son matrices cuadradas de la misma dimensión.

a) (1 punto) Despeje la matriz X en la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.

b) (2 puntos) Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Solución

(a)

Despeja la matriz X de $AX + B = A$, de donde $AX = A - B$.

De $AX + B = A$, obtenemos $AX = A - B$. Si A tiene inversa podemos multiplicar por la izquierda la expresión $AX = A - B$ por la inversa A^{-1} quedándonos.

$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot B$, es decir $X = I_2 - A^{-1} \cdot B$ con I_2 la matriz unidad de orden 2.

(b)

Obtenga la matriz X en la igualdad anterior, siendo

Si A tiene inversa mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$$(I_2|A) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1-2 \cdot F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2+3 \cdot F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \cdot F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Cambio } F_1 \text{ por } F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right), \text{ por tanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

También se puede calcular con determinantes, $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$ siempre que $|A| \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; |A| = 6-5 = 1; A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \text{luego } A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = I_2 - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

$$\text{Sea la función } f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

a) (2 puntos) Analice la continuidad y la derivabilidad de la función en su dominio.

b) (0'5 puntos) Determine la asíntota horizontal, si la tiene.

c) (0'5 puntos) Determine la asíntota vertical, si la tiene.

Solución

(a)

Analice la continuidad y la derivabilidad de la función en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases},$$

$x^2 + x$ es una función polinómica, luego continua y derivable en todo \mathbb{R} , en particular en $x < 0$.

$\frac{x}{x+1}$ es una función racional, luego continua y derivable en $\mathbb{R} - \{\text{soluciones } x+1 = 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$, en particular en $x > 0$.

Por ahora tenemos que $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

Nos falta ver la continuidad y derivabilidad en " $x = 0$ ".

$$f(x) \text{ es continua en } x = 0 \text{ si } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$f(0) = \frac{0}{0+1} = 0; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = (0)^2 + (0) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = \frac{0}{0+1} = 0. \text{ Como los tres valores son}$$

iguales, la función $f(x)$ **es continua en $x = 0$** .

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ es derivable en $x = 0$ si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1) = 0+1 = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1/1 = 1, \text{ como ambos valores coinciden la}$$

$$\text{función } f(x) \text{ es derivable en } x = 0. \text{ Luego } f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b)

Determine la asíntota horizontal, si la tiene.

La función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $+\infty$, porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = \{ \text{nos quedamos con los}$

términos de mayor grado de "x"} = $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \{ \text{simplifico las "x"} \} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$, luego **la recta "y = 1" es la**

asíntota horizontal de $f(x)$ en $+\infty$.

c)

Determine la asíntota horizontal, si la tiene.

Si tuviese asíntota vertical, la tendría en " $x = -1$ " para la rama $\frac{x}{x+1}$, pero dicha rama $\frac{x}{x+1}$ sólo está definida

par $x \geq 0$, por tanto **$f(x)$ no tiene asíntota vertical.**

EJERCICIO 3

Parte I

Un turista que realiza un crucero tiene un 50% de probabilidad de visitar Cádiz, un 40% de visitar Sevilla y un 30% de visitar ambas ciudades. Calcule la probabilidad de que:

- (0'5 puntos) Visite al menos una de las dos ciudades.
- (0'5 puntos) Visite únicamente una de las dos ciudades.
- (0'5 puntos) Visite Cádiz pero no visite Sevilla.
- (0'5 puntos) Visite Sevilla, sabiendo que ha visitado Cádiz.

Solución

Llamemos C y S a los sucesos siguientes, "visitar Cádiz" y "visitar Sevilla, respectivamente.

De "un turista tiene un 50% de probabilidad de visitar Cádiz", tenemos $p(C) = 50\% = 0'5$.

De "un turista tiene un 40% de probabilidad de visitar Sevilla", tenemos $p(S) = 40\% = 0'4$.

De "un turista tiene un 30% de probabilidad de visitar ambas", tenemos $p(C \cap S) = 30\% = 0'3$.

a)

Visite al menos una de las dos ciudades.

Me están pidiendo $p(C \cup S) = p(C) + p(S) - p(C \cap S) = 0'5 + 0'4 - 0'3 = 0'6$.

b)

Visite únicamente una de las dos ciudades.

Me están pidiendo $p(C \text{ y no } S) \text{ ó } p(\text{no } C \text{ y } S) = p(C \cap S^c) + p(C^c \cap S) =$

$= p(C) - p(C \cap S) + p(S) - p(C \cap S) = 0'5 - 0'3 + 0'4 - 0'3 = 0'3$.

c)

Visite Cádiz pero no visite Sevilla.

Me están pidiendo $p(C \text{ y no } S) = p(C \cap S^c) = p(C) - p(C \cap S) = 0'5 - 0'3 = 0'2$.

d)

Visite Sevilla, sabiendo que ha visitado Cádiz.

Me están pidiendo $p(S/C) = \frac{p(S \cap C)}{p(C)} = (0'3)/(0'5) = 0'6$.

EJERCICIO 3

Parte II

El tiempo (en horas) que permanecen los coches en un determinado taller de reparación es una variable aleatoria con distribución Normal de desviación típica 4 horas.

- (1 punto) Se eligieron, al azar, 16 coches del taller y se comprobó que, entre todos, estuvieron 136 horas en reparación. Determine un intervalo de confianza, al 98'5%, para la media del tiempo que permanecen los coches en ese taller.

b) (1 punto) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra que permita estimar la media del tiempo que permanecen en reparación los coches en ese taller con un error en la estimación no superior a una hora y media y con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

Solución

Sabemos que si X sigue una $N(\mu, \sigma)$, la distribución muestral de medias \bar{X} sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y que el intervalo de confianza para estimar la media μ , al nivel de confianza $1-\alpha$, es

$$I(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) \text{ para estimar } \mu.$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ tal que $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.

Que el **Error máximo** es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media (radio del intervalo).

De $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, obtenemos el **tamaño de la muestra** es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$ en $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

a)

Se eligieron, al azar, 16 coches del taller y se comprobó que, entre todos, estuvieron 136 horas en reparación. Determine un intervalo de confianza, al 98.5%, para la media del tiempo que permanecen los coches en ese taller.

Datos del problema: $n = 16$; $\sigma = 4$; $1-\alpha = 98.5\% = 0.985$, de donde $\alpha = 0.015$; $\bar{x} = 136/16 = 8.5$.

Sabemos que de $1-\alpha = 0.97$, tenemos $\alpha = 0.03$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0.015/2 = 0.9925$, que miramos en la tabla de la $N(0,1)$ y corresponde a un **punto crítico** $z_{1-\alpha/2} = 2.43$.

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que el intervalo de confianza es } I(\mu) &= \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \\ &= \left(8.5 - 2.43 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}}, 8.5 + 2.43 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} \right) = (6.07, 10.93) \end{aligned}$$

b)

Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra que permita estimar la media del tiempo que permanecen en reparación los coches en ese taller con un error en la estimación no superior a una hora y media y con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

Datos $E < 1.5$; $\sigma = 4$; $1-\alpha = 98.5\% = 0.985$, que es el mismo del apartado(a) y hemos obtenido $z_{1-\alpha/2} = 2.43$.

De $E < z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, obtenemos el tamaño de la muestra es $n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left(\frac{2.43 \cdot 4}{1.5} \right)^2 = 41.9904$, luego el

tamaño mínimo de la muestra es $n = 42$.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1.5 puntos) Dibuje el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2, \quad x - y \leq 0, \quad y \leq 4, \quad x \geq 0.$$

b) (1 punto) Determine el máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = x + y$ en el recinto anterior y los puntos donde se alcanzan.

c) (0.5 puntos) ¿Pertenece el punto $(1/3, 4/3)$ al recinto anterior? Justifique la respuesta.

Solución

a)

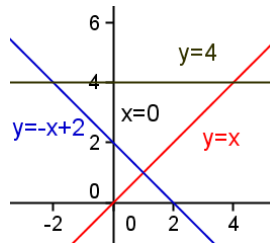
Dibuje el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2, \quad x - y \leq 0, \quad y \leq 4, \quad x \geq 0.$$

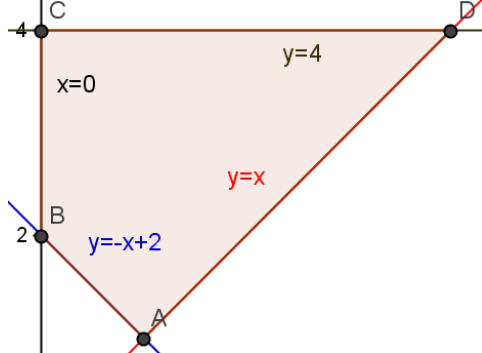
Primeramente transformamos las desigualdades "x + y ≥ 2; x - y ≤ 0; y ≤ 4; x ≥ 0"; en igualdades, y ya su gráfica es una recta,

$$x + y = 2; \quad x - y = 0; \quad y = 4; \quad x = 0,$$

Despejamos la "y", y dibujamos las rectas correspondientes: $y = -x+2$; $y = x$; $y = 4$; $x = 0$.



Fijándonos en las desigualdades: $y \geq -x+2$; $y \geq x$; $y \leq 4$; $x \geq 0$, el recinto pedido y sus vértices A, B y C son:



Calculamos los vértices A, B, C y D resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos:

$$y = -x+2; y = x; y = 4; x = 0$$

De $y = -x+2$ e $y = x$, tenemos $-x+2 = x$, de donde $2x = 2$, luego $x = 1$ e $y = 1$, y el punto de corte es A(1,1).

De $y = -x+2$ y $x = 0$, tenemos $y = 2$, luego $x = 0$ e $y = 2$, y el punto de corte es B(0,2).

De $y = 4$ y $x = 0$, tenemos el punto de corte es C(0,4).

De $y = x$ e $y = 4$, tenemos $x = 4$, de donde $x = 4$ e $y = 4$, y el punto de corte es D(4,4).

Los vértices de la región son A(1,1), B(0,2) C(0,4) y D(4,4).

b)

Determine el máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = x + y$ en el recinto anterior y los puntos donde se alcanzan.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal, afirma que la función F alcanza su máximo y su mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe de estar situado en algún vértice del recinto (si coincide en dos vértices consecutivos, la solución es todo el segmento que los une), por lo que evaluamos la función $F(x,y) = x + y$ en los puntos anteriores:

$$F(1,1) = 1 + 1 = 2, \quad F(0,2) = 0 + 2 = 2, \quad F(0,4) = 0 + 4 = 4, \quad F(4,4) = 4 + 4 = 8 .$$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos el mínimo absoluto de la función F en la región es 2 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en los puntos (1,1) y (0,2), por tanto se alcanza en todo el segmento que une los puntos (1,1) y (0,2); y el máximo absoluto de la función F en la región es 8 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (4,4).

c)

¿Pertenece el punto (1/3,4/3) al recinto anterior? Justifique la respuesta.

Para que el punto (1/3,4/3) esté en el recinto, debe verificar todas las inecuaciones $x+y \geq 2$, $x-y \leq 0$, $y \leq 4$, $x \geq 0$.

De $x+y \geq 2$, tenemos $1/3 + 4/3 = 5/3 \cong 1'66$ que no es mayor de 2, luego **(1/3,4/3) no esté en el recinto.**

EJERCICIO 2

Un estudio acerca de la presencia de gases contaminantes en la atmósfera de una ciudad indica que el nivel de contaminación viene dado por la función:

$$C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25 \quad (t = \text{años transcurridos desde el año 2000}).$$

a) (1 punto) ¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

b) (1 punto) ¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

c) (1 punto) Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función C(t) en $t = 8$. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

Solución

a)

¿En qué año se alcanzará un máximo en el nivel de contaminación?

Me están pidiendo el "máximo" de la función $C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25, \quad 0 \leq t \leq 25$.

La gráfica de la función $C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25$ ($a = -0'2$, $b = 4$, $c = 25$) es una parábola con las ramas hacia

abajo (\cap), porque $a = -0'2 < 0$, por tanto la abscisa del máximo (que es su vértice) anula la primera derivada.

$$C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25.$$

$$C'(t) = -0'4t + 4.$$

De $C'(t) = 0$, tenemos $-0'4t + 4 = 0$, de donde $t = 10$. Como empezamos en el año 2000, **el año de mayor contaminación es el 2000 + 10 = 2010.**

b)

¿En qué año se alcanzará el nivel de contaminación cero?

Me están pidiendo que resuelva la ecuación $C(t) = 0$, 1 elija las soluciones en $0 \leq t \leq 25$

$$C(t) = -0'2t^2 + 4t + 25 = 0 \rightarrow 0'2t^2 - 4t - 25 = 0 \rightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{0'4} = \frac{4 \pm 6}{0'4}, \text{ de donde } t = 25 \text{ y } t = -5. \text{ Sólo nos}$$

sirve $t = 25$, por tanto como empezamos en el año 2000, **el año de contaminación cero es el 2000 + 25 = 2025.**

c)

Calcule la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $C(t)$ en $t = 8$. Interprete el resultado anterior relacionándolo con el crecimiento o decrecimiento.

Sabemos que la pendiente de $C(t)$ en $t = 8$ es $C'(8)$.

$$\text{Hemos calculado ya } C'(t) = -0'4t + 4, \text{ luego } C'(8) = -0'4(8) + 4 = 0'8.$$

También sabemos que **si la primera derivada es mayor que cero la función es estrictamente creciente.** Como $C'(8) = 0'8 > 0$, la función contaminación es estrictamente creciente en $t = 8$ (punto donde hemos calculado la pendiente), por tanto **en el año 2000 + 8 = 2008 la contaminación es estrictamente creciente.**

EJERCICIO 3

Parte I

En un centro escolar, los alumnos de 2º de Bachillerato pueden cursar, como asignaturas optativas, Estadística o Diseño Asistido por Ordenador (DAO). El 70% de los alumnos estudia Estadística y el resto DAO. Además, el 60% de los alumnos que estudia Estadística son mujeres y, de los alumnos que estudian DAD son hombres el 70%.

a) (1 punto) Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

b) (1 punto) Sabiendo que se ha seleccionado una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Estadística?

Solución

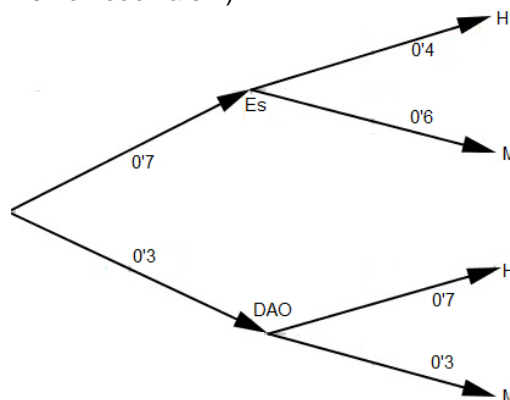
Llamemos Es, DAO, H y M a los sucesos siguientes, "estudiar Estadística", "estudiar DAO", "ser hombre" y "ser mujer", respectivamente.

De "el 70% de los alumnos estudia Estadística", tenemos $p(\text{Es}) = 70\% = 0'7$, y por el suceso contrario tenemos $p(\text{DAO}) = 1 - p(\text{Es}) = 1 - 0'7 = 0'3$.

De "el 60% de los alumnos que estudia Estadística son mujeres", tenemos $p(\text{M/Es}) = 60\% = 0'6$.

De "los alumnos que estudian DAD son hombres el 70%", tenemos $p(\text{H/DAO}) = 70\% = 0'7$.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

Elegido un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que dé positivo (+) es:

$$p(\text{H}) = p(\text{Es}) \cdot p(\text{H/Es}) + p(\text{DAO}) \cdot p(\text{H/DAO}) = 0'7 \cdot 0'4 + 0'3 \cdot 0'7 = 0'49.$$

b)

Sabiendo que se ha seleccionado una mujer, ¿cuál es la probabilidad de que estudie Estadística?

Aplicando el teorema de Bayes y la probabilidad del suceso contrario, tenemos:

$$p(\text{Es}/M) = \frac{p(\text{Es} \cap M)}{p(M)} = \frac{p(\text{Es}) \cdot p(M/\text{Es})}{1 - p(H)} = \frac{0'7 \cdot 0'6}{1 - 0'49} \cong 0'824$$

Parte II

En un estudio de mercado del automóvil en una ciudad se ha tomado una muestra aleatoria de 300 turismos, y se ha encontrado que 75 de ellos tienen motor diesel. Para un nivel de confianza del 94%:

a) (1'5 puntos) Determine un intervalo de confianza de la proporción de turismos que tienen motor diesel en esa ciudad.

b) (0'5 puntos) ¿Cuál es el error máximo de la estimación de la proporción?

Solución

Sabemos que la distribución muestral de proporciones \hat{P} cuando el tamaño de la muestra es

suficientemente grande sigue una $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}})$, que el intervalo de confianza para estimar la proporción

p , al nivel de confianza $1-\alpha$, es

$$I(p) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) \text{ para estimar } p$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ tal que $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.

Que el **Error máximo** es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$, para el intervalo de la proporción (radio del intervalo).

Que de $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, obtenemos el **tamaño de la muestra** es $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p} \cdot \hat{q}}{E^2}$ en $N(\hat{p}; \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}})$.

a)

Determine un intervalo de confianza de la proporción de turismos que tienen motor diesel en esa ciudad.

Datos del problema: $n = 300$; $\hat{p} = 75/300 = 0'25$, de donde $\hat{q} = 1 - 0'25$; $1 - \alpha = 95\% = 0'95$.

Sabemos que de $1 - \alpha = 0'95$, tenemos $\alpha = 0'05$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'05/2 = 0'975$, que miramos en la tabla de la $N(0,1)$ y le corresponde un **punto crítico** $z_{1-\alpha/2} = 1'96$.

Sabemos que el intervalo de confianza es $I(p) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) =$

$$= \left(0'25 - 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{300}}, 0'25 + 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{300}} \right) \cong (0'201, 0'299).$$

b)

¿Cuál es el error máximo de la estimación de la proporción?

Sabemos que el "Error máximo" es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{300}} \cong 0'049$.