MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES CURSO 2008-2009

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $M = A^t.A^{-1}$.

Solución

a)

Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones dado por $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Efectuamos la multiplicación de matrices e igualamos miembro a miembro.

$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 3y+2-4x \\ 2y+2x+2+2 \\ 2+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Igualando tenemos

$-4x+3y + 2 = -1$

$2x+2y + 4 = 2$

$2+z = 0$, de donde $z = - 2$.

Si a la 1ª ecuación de sumo la 2ª multiplicada por 2, me queda $7y +10 = 3$, de donde $y = -1$, por tanto $x = 0$.

La solución del sistema es $(x,y,z) = (-1,-1,0)$.

b)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcule la matriz $M = A^t.A^{-1}$.

De $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ tenemos $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de A mediante transformaciones elementales por filas de Gauss, se obteiene de la siguiente forma. Si podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, entonces $B = A^{-1}$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2-2.F_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1+3.F_2 \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_1/2 \\ -1.F_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$, por tanto

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

También se puede calcular con determinantes, $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t)$ siempre que $|A| \neq 0$.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$; $|A| = 10-12 = -2 \neq 0$; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; luego $A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t) =$

$= (1/-2).\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz pedida es $M = A^t.A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.(1/-2).\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = (-1/2).\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2

Un almacenista de frutas ha estimado que el beneficio que le produce cada kilogramo (kg) de fresas depende del precio de venta de acuerdo con la función

$$B(x) = -x^2 + 4x - 3$$

siendo B(x) el beneficio por kg y x el precio de cada kg, ambos expresados en euros.

a) (1'25 puntos) ¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?

b) (1'25 puntos) ¿Qué precio maximiza los beneficios?

c) (0'5 puntos) Si tiene en el almacén 10000 kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?

Solución

a)

¿Entre qué precios se producen beneficios para el almacenista?

La función beneficio es $B(x) = -x^2 + 4x - 3$

La gráfica de $B(x) = -x^2 + 4x - 3$ ($a = -1$, $b = 4$, $c = -3$) es la de una parábola con las ramas hacia abajo porque $a = -1 < 0$. ($\cap$)

Los beneficios no pueden ser negativos, por tanto lo que tenemos que hacer es resolver la ecuación $B(x) = 0$, y en el intervalo que determinen sus soluciones estarán los beneficios pedidos.

$B(x) = -x^2 + 4x - 3 = 0$; $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow \dfrac{-(-4)\pm\sqrt{4^2-12}}{2} = \dfrac{4\pm 2}{2}$, de donde $x = 3$ y $x = 1$.

Los beneficios están en el intervalo cerrado $[1,3]$, es decir $1 \le x \le 3$.

b)

¿Qué precio maximiza los beneficios?

Sabemos que la abscisa del vértice, el máximo en este caso es $x = -b/2a = -(-4)/2 = 2$; luego el precio que maximiza los beneficios es $x = 2$ euros.

c)

Si tiene en el almacén 10000 kg de fresas, ¿cuál será el beneficio total máximo que podrá obtener?

Como el precio que maximiza los beneficios es “2” euros y teneos 10000 kg, el beneficio total máximo que se puede obtener es 2.10000 = 20000 euros.

EJERCICIO 3

Parte I

Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A^C) = 0'2,\ p(B) = 0'25 \text{ y } p(A\cup B) = 0'85.$$

a) (1’25 puntos) ¿Son los sucesos A y B independientes?

b) (0’75 puntos) Calcule $p(A^C/B^C)$.

Solución

a)

¿Son los sucesos A y B independientes?

Sabemos que dos sucesos son independientes si $p(A\cap B) = p(A).p(B)$. Necesitamos $p(A\cap B)$.

De $p(A^C) = 0'2$, por el suceso contrario tenemos $p(A) = 1 - p(A^C) = 1 - 0'2 = 0'8$.

También sabemos que $p(A\cup B) = p(A)+ p(B)- p(A\cap B)$. Sustituyendo en esta fórmula tenemos:

$0'85 = 0'8 + 0'25 - p(A\cap B)$, de donde $p(A\cap B) = 0'8 + 0'25 - 0'85 = 0'2$.

Como $p(A\cap B) = 0'2$, y $p(A).p(B) = 0'8.0'25 = 0'2$, **los sucesos A y B son independientes**.

b)

Calcule $p(A^C/B^C)$.

Por definición $p(A^C/B^C) = \dfrac{p(A^C\cap B^C)}{p(B^C)}$ = {utilizando las leyes de Morgan y el suceso contrario} =

$= \dfrac{p((A\cup B)^C)}{1-p(B)} = \dfrac{1-p(A\cup B)}{1-p(B)} = (1- 0'85)/(1-0'25) = 0'2.$

EJERCICIO 3

Parte II

(2 puntos) Escriba todas las muestras de tamaño 2 que, mediante muestreo aleatorio simple (con reemplazamiento), se pueden extraer del conjunto {8,10,12} y determine el valor de la varianza de las medias de esas muestras.

Solución

Las muestras de tamaño 2 con reemplazamiento que podemos obtener son:

8-8; 8-10; 8-12; 10-8; 10-10; 10-12; 12-8; 12-10; 12-12. En total nueve.

Las medias de las muestras es 8; 9; 10; 9; 10; 11; 10; 11; 12

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla siguiente:

Media de la Muestra $\overline{x}_i$	8	9	10	11	12
Número de veces n_i	1	2	2	2	1

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es:

$\mu_X = \dfrac{1}{N}\sum_i n_i.\overline{x}_i = (1/9).(1.8 + 2.9 + 2.10 + 2.11 + 1.12) = 80/9$

la varianza de las medias de esas muestras es:

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{N}\sum_i n_i.\left(\bar{x}_i\right)^2 - (\mu_{\bar{X}})^2 = (1/9).(1.8^2 + 2.9^2 + 2.10^2 + 2.11^2 + 1.12^2) - (80/9)^2 =$$

$$= 812/9 - (80/9)^2 = 908/81 \cong 11'2098765.$$

También se podía haber resuelto teniendo en cuenta que en los muestreos con reemplazamiento la media de la población coincide con la media muestral, y que la desviación típica de las muestras coincide con la desviación típica de la población partido la raíz cuadrada del tamaño de la muestra.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

(3 puntos) Un agricultor posee 10 hectáreas (ha.) y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua no puede destinar más de 5 ha. a hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros/ha. y el de hortalizas de 3000 euros/ha., no pudiendo superar el coste total la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha. de cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halle la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcule dicho máximo.

Solución

Llamamos "x" al número de "ha." de cereales .
Llamamos "y" al número de "ha." de hortalizas.
Para determinar las inecuaciones y la función Beneficio F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

Llamamos "x" al número de lotes del tipo A.

	"ha." de cereales	"ha." de hortalizas	Máximo
Cultivo	x	y	10
Topes	Más de 0	Más de 0 y Máximo 5	
Coste	1000x	3000y	16000
Beneficio	2000€	8000€	2000x + 8000y

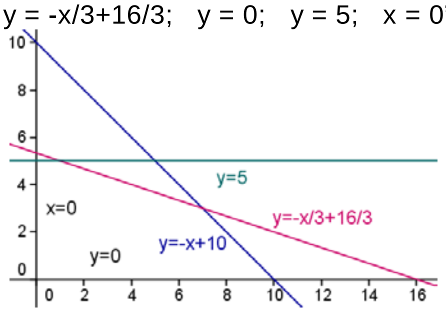
Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones:

$$x + y \le 10; \quad 1000x + 3000y \le 16000; \quad y \ge 0; \quad y \le 5; \quad x \ge 0$$

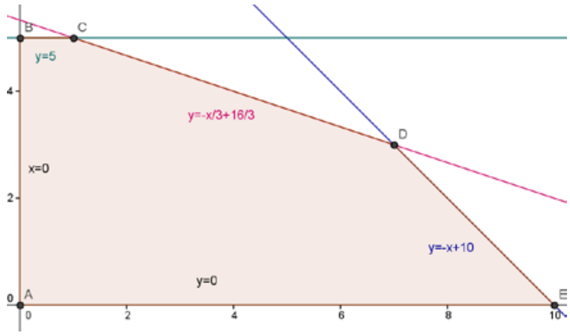
La función que maximiza el beneficio es F(x,y) = 2000x + 8000y

Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación ponemos su correspondiente ecuación, después despejamos la incógnita "y" y dibujamos su recta correspondiente. Finalmente observando las desigualdades dibujamos la región factible y sus vértices.
De las desigualdades "$x + y \le 10$; $1000x + 3000y \le 16000$; $y \ge 0$; $y \le 5$; $x \ge 0$ "; obtenemos las igualdades "$x + y = 10$; $1x + 3y = 16$; $y = 0$; $y = 5$; $x = 0$".

Dibujamos las rectas "$y = -x+10$; $y = -x/3+16/3$; $y = 0$; $y = 5$; $x = 0$".



Fijándonos en las desigualdades "$y \le -x+10$; $y \le -x/3+16/3$; $y \ge 0$; $y \le 5$; $x \ge 0$", la región factible y los vértices son:



Calculamos los vértices A, B, C, D y E del recinto resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos.
"y = -x+10; y = -x/3+16/3; y = 0; y = 5; x = 0"
De x=0 e y=0, Tenemos el punto de corte es A(0,0).
De x=0 e y = 5, tenemos y = 100, y el punto es B(0,5).
De y=-x/3+16/3 e y=5, tenemos -x/3+16/3 = 5, es decir –x+16 = 15, luego x = 1 e y = 5, y el punto de corte es C(1,5).
De y=-x/3+16/3 e y=-x + 10, tenemos -x/3+16/3 = -x + 10, es decir -x+16 = -3x+30, de donde 2x=14, luego x = 7 e y = 3, y el punto de corte es D(7,3).
De y=0 e y= -x+10, Tenemos 0 = -x+10, de donde "x = 10", y el punto de corte es E(10,0)

El recinto con sus vértices A(0,0), B(0,5), C(1,5), D(7,3) y E(10,0) es:

Consideremos la función beneficio F(x,y) = 2000x + 8000y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y su mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(0,0) = 2000(0) + 8000(0) = 0, F(0,5) = 2000(0) + 8000(5) =40000, F(1,3)= 2000(1) + 8000(3) = 26000, F(7,3)= 2000(7) + 8000(3) = 38000; F(10,0)= 2000(10) + 8000(0) = 20000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 38000€ (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (7,3), es decir para obtener el mayor beneficio hay que sembrar 7 ha. de cereales y 3 ha. de hortalizas.

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x+8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) (2 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f.
b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 3.

Solución

(a)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x+8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Estudie su continuidad y su derivabilidad.

Si x < 1, $f(x) = 3^x$ es continua y derivable en todo R, en particular en x < 1.
Si x > 1, $f(x) = x^2-6x+8$ es continua y derivable todo R, en particular en x > 1.
Falta ver la continuidad y derivabilidad en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1) = 3^1 = 3$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 3^x = 3^1 = 3$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2-6x+8) = 1^2-6(1)+8 = 3$. Como los tres valores **son iguales**, la función f(x) **es continua en x = 1**.

$f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x+8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 3^x.\ln(3) & \text{si } x < 1 \\ 2x-6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. (Estamos viendo la continuidad de la derivada).

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 3^x.\ln(3) = 3.\ln(3)$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x-6) = -4$. Como $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 3.\ln(3) \neq -4 = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, la función f(x) **no es derivable en x = 1**.

b)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 3.
Vemos que "x = 3", está en la rama x > 1, luego $f(x) = x^2-6x+8$.
Sabemos que la recta tangente en x = 3 es " y-f(3) = f'(3)(x-3)".
De $f(x) = x^2-6x+8$, tenemos $f(3) = 3^2-6(3)+8 = -1$.
De f'(x) = 2x-6, tenemos f'(3) = 2(3)-6 = 0. (al anularse la 1ª derivada estamos calculando la recta tangente en el vértice de la parábola, por tanto nos saldrá una recta horizontal).
La recta tangente pedida es " y-(-1) = (0)(x-3)", es decir y+1 = 0, de donde **y = -1**.

EJERCICIO 3

Parte I

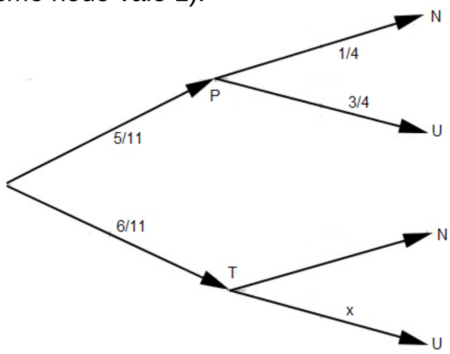
Un polideportivo dispone de 100 bolas de pádel y 120 bolas de tenis. Se sabe que 65 bolas son nuevas. Además, 75 bolas de pádel son usadas. Por un error, todas las bolas se han mezclado.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola de tenis, ésta sea usada.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola, sea nueva.

Solución

Llamemos P, T, N y U a los sucesos siguientes, "bola de pádel", "bola de tenis", "bola nueva" y " bola usada", respectivamente.

De "100 bolas de pádel y 120 bolas de tenis", tenemos p(P) = 100/220 = 5/11, y p(T) = 120/220 = 6/11.
De "65 bolas son nuevas", tenemos p(N) = 65/220 = 13/44, y por el suceso contrario tenemos p(U) =
= 1- p(N) = 1 - 13/44 = 31/44.
De "75 bolas de pádel son usadas", tenemos p(P/U) = 75/100 = 3/4, por el contrario p(P/N) = 1-3/4 = 1/4.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



b)
Calcule la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola, sea nueva.
Me lo dá el enunciado del problema, es decir p(N) = 13/44.
a)
Calcule la probabilidad de que si elegimos, al azar, una bola de tenis, ésta sea usada.
Me están pidiendo p(U/T) = x.
Usando el teorema de la probabilidad total tenemos " p(U) = p(P).p(U/P) + p(T).p(U/T)", sustituyendo los valores conocidos tenemos:
31/44 = (5/11).(3/4) + (6/11).(x). Operando y despejando "x" tenemos: x = 2/3.

Este problema se podría haber realizado por tablas de contingencia, y obtendrías lo mismo.
La elección depende de cada uno.

Pongo la tabla de contingencia, pero no realizo de nuevo el problema, ya calculado.

	Bola de pádel	Bola de Tenis	Totales
Bola nueva	**25**	**40**	65
Bola usada	75	**80**	**155**
Totales	100	120	220

En "negrita están los datos que tienes que calcular restando a los totales tanto en horizontal como en vertical.

EJERCICIO 3

Parte II

a) (1 punto) En una población, una variable aleatoria X sigue una distribución Normal de media 50 y

desviación típica 9. Se elige, al azar, una muestra de tamaño 64 de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 48 y 52?
b) (1 punto) En una empresa de gas trabajan 150 personas en mantenimiento, 450 en operaciones, 200 en servicios y 100 en cargos directivos. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores de esa empresa por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de trabajadores se debe elegir de cada grupo?

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una normal N(μ, σ), la distribución muestral de medias $\overline{X}$ sigue una normal N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

a)
En una población, una variable aleatoria X sigue una distribución Normal de media 50 y desviación típica 9. Se elige, al azar, una muestra de tamaño 64 de esa población. ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 48 y 52?

Datos: X sigue una normal N(50,9), luego $\mu = 50 = \overline{x}$ y $\sigma = 9$; n = 64

Me están pidiendo $p(48 < \overline{X} < 52)$ = { tipifico $Z = \frac{\overline{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ } = $p\left(\frac{48-50}{9/\sqrt{64}} < Z < \frac{52-50}{9/\sqrt{64}}\right) \cong p(-1'78 < Z < 1'78)$ =
= $p(Z < 1'78) - p(Z < -1'78) = p(Z < 1'78) - [1 - p(Z \le 1'78)] = 2.\ p(Z < 1'78) - 1$= {mirando en las tablas de la N(0,1) } = 2.0'9625 - 1 = 0'925.

b)
En una empresa de gas trabajan 150 personas en mantenimiento, 450 en operaciones, 200 en servicios y 100 en cargos directivos. Con objeto de realizar una encuesta laboral, se quiere seleccionar una muestra de 180 trabajadores de esa empresa por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de trabajadores se debe elegir de cada grupo?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{150} = \frac{n_2}{450} = \frac{n_3}{200} = \frac{n_4}{100} = \frac{180}{150+450+200+100} = \frac{180}{900} = \frac{1}{5}$.

De $\frac{n_1}{150} = \frac{1}{5}$, tenemos $n_1 = \frac{150}{5}$ = 30 trabajadores de mantenimiento.

De $\frac{n_2}{450} = \frac{1}{5}$, tenemos $n_2 = \frac{450}{5}$ = 90 trabajadores en operaciones.

De $\frac{n_3}{200} = \frac{1}{5}$, tenemos $n_3 = \frac{200}{5}$ = 40 trabajadores en servicios.

De $\frac{n_4}{100} = \frac{1}{5}$, tenemos $n_4 = \frac{100}{5}$ = 20 trabajadores en cargos directivos.