MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES CURSO 2008-2009

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

(3 puntos) Obtenga los valores máximo y mínimo, indicando los puntos donde se alcanzan, de la función objetivo F(x, y) = x – y en la región definida por las restricciones

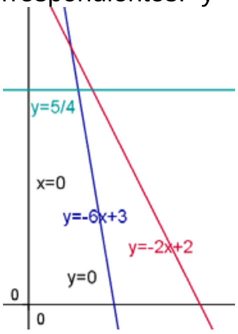
$$6x + y \geq 3;\ 2x + y \leq 2;\ y \leq 5/4;\ x \geq 0;\ y \geq 0.$$

Solución

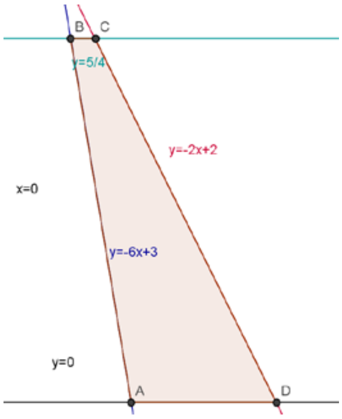
Primeramente transformamos las desigualdades "$6x + y \geq 3$; $2x + y \leq 2$; $y \leq 5/4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$"en igualdades, y ya su gráfica es una recta,

$$6x + y = 3;\ 2x + y = 2;\ y = 5/4;\ x = 0;\ y = 0,$$

Despejamos la "y", y dibujamos las rectas correspondientes: y = -6x+3; y = -2x+2; y = 5/4; x = 0; y = 0.



Fijándonos en las desigualdades: $y \geq -6x+3$; $y \leq -2x+2$; $y \leq 5/4$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, la región factible y sus vértices A, B, C y D son:



Calculamos los vértices resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos:

y = -6x+3; y = -2x+2; y = 5/4; x = 0; y = 0

De y= -6x+3 e y= 0, tenemos -6x+3 = 0, de donde x = 1/2, y el punto de corte es A(1/2,0).

De y= -6x+3 e y= 5/4, tenemos -6x+3 = 5/4, de donde -24x +12 = 5, luego 24x = 7, por tanto x = 7/24 e y=5/4, y el punto de corte es B(7/24,5/4).

De y= -2x+2 e y= 5/4, tenemos -2x+2 = 5/4, de donde -8x +8 = 5, luego 8x = 3, por tanto x = 3/8 e y=5/4, y el punto de corte es C(3/8,5/4).

De y= -2x+2 e y= 0, tenemos -2x+2 = 0, de donde x = 1 e y = 0, y el punto de corte es D(1,0).

Los vértices de la región son A(1/2,0), B(7/24,5/4), C(3/8,5/4) y D(1,0).

Consideremos la función F(x, y) = x – y .

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal, afirma que la función F alcanza su máximo y su mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe está situado en algún vértice del recinto (si coincide en dos vértices consecutivos, la solución es todo el segmento que los une), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(1/2,0) = (1/2) – (0) = 1/2, F(7/24,5/4)= (7/24) – (5/4) = -23/24 $\cong$ - 0'958,
F(3/8,5/4) = (3/8) – (5/4) = -7/8 $\cong$ - 0'875, F(1,0) = (1) – (0) = 1.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos el mínimo absoluto de la función F en la región es -23/24 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en el punto (7/24,5/4), y el máximo absoluto es 1(el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (1,0).

EJERCICIO 2
Sea la función $f(x) = x^3 -1$.
a) (1 punto) Calcule los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese.
b) (1 punto) Determine su curvatura y punto de inflexión.
c) (1 punto) Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.

Solución

Recordamos que la monotonía sale del estudio de la primera derivada, y la curvatura del estudio de la segunda derivada.
Si $f'(x) > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente (Se dibuja hacia arriba).
Si $f'(x) < 0$, $f(x)$ es estrictamente decreciente (Se dibuja hacia abajo).
Si $f''(x) > 0$, $f(x)$ es convexa ($\cup$), en Andalucía.
Si $f'(x) < 0$, $f(x)$ es cóncava ($\cap$), en Andalucía.
Recordemos también pendiente de la recta tangente en x = 3 es "$f'(3)$", y que la pendiente genérica de $f(x)$ es $f'(x)$

a)
Calcule los puntos de corte de la gráfica con los ejes, su monotonía y extremos relativos, si los tuviese.

Cortes con los ejes:
Para x = 0, $f(0) = (0)^3 -1 = -1$. Punto de corte con ordenadas OY, (0,-1).
Para $f(x) = 0$, $x^3 -1= 0$, de donde $x = \sqrt[3]{1} = 1$. Punto de corte con abscisas OX, (1,0)

De la función $f(x) = x^3 -1$, tenemos $f'(x) = 3x^2$. Resolvemos $f'(x) = 0$, que serán los posibles máximos o mínimos relativos.
$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{0} = 0$, de donde "x = 0" (doble).
Elegimos un solo numero a izquierda y derecha de las solución "0", y entramos con él en $f'(x)$ para ver su signo.
Como $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3 > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty,0)$.
Como $f'(1) = 3(1)^2 = 3 > 0$, $f(x)$ es estrictamente creciente en $(0,+\infty)$.
Por tanto $f(x)$ es estrictamente creciente en R y no tiene ni máximos ni mínimos relativos en todo R.

b)
Determine su curvatura y punto de inflexión.
De $f'(x) =$, tenemos $f''(x) = 6x$. Resolvemos $f''(x) = 0$, que serán los posibles puntos de inflexión.
$f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0$, de donde "x = 0".
Elegimos un solo numero a izquierda y derecha de la solución "0", y entramos con él en $f''(x)$ para ver su signo.
Como $f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$, $f(x)$ es cóncava ($\cap$) en $(-\infty,0)$.
Como $f''(1) = 6(1) = 6 > 0$, $f(x)$ es convexa ($\cup$) en $(0,\infty)$.
Por definición "x = 0" es un punto de inflexión de $f(x)$, pues en él cambia la curvatura.

c)
Halle los puntos de la gráfica en los que la recta tangente tiene de pendiente 3.

La pendiente de la recta tangente de $f(x)$ en x = 3 es "$f'(3) = 3(3)^2 =27$."
La pendiente genérica de $f(x)$ es $f'(x) = 3x^2$.
Igualamos las pendientes, $f'(x) = f'(3)$, es decir $3x^2 = 27$, de donde $x^2 = 9$. Luego $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$, por tanto las ordenadas son $f(3) = 3^3 -1 =28$ y $f(-3) = (-3)^3 -1 = -30$. Los puntos pedidos son (3,28) y (-3, -30).

EJERCICIO 3
Parte I
Sean A y B dos sucesos tales que $p(A) = 0'3$, $P(B) = 0'4$, $P(A\cup B) = 0'65$.
Conteste razonadamente las siguientes preguntas:
a) (0'5 puntos) ¿Son incompatibles A y B?
b) (0'5 puntos) ¿Son independientes A y B?
c) (1 punto) Calcule $P(A/B^C)$.

Solución

a)
¿Son incompatibles A y B?

Sabemos que dos sucesos A y B son incompatibles si $p(A\cap B) = 0$. Necesitamos calcular $p(A\cap B)$.
Sabemos que $p(A\cup B) = p(A)+ p(B) - p(A\cap B)$. Sustituyendo tenemos:
$0'65 = 0'3 + 0'4 - p(A\cap B)$, de donde $p(A\cap B) = 0'05 \neq 0$, luego **no son independientes**.
a)
¿Son independientes A y B?

Sabemos que dos sucesos son independientes si $p(A\cap B) = p(A).p(B)$.

Como $p(A\cap B) = 0'05$, y $p(A).p(B) = 0'3.0'4 = 0'12$, vemos que $p(A\cap B) \neq p(A).p(B)$ por tanto **los sucesos A y B no son independientes**.

c)
Calcule $P(A/B^C)$.

Sabemos que $p(A\cap B^C) = p(A) – p(A\cap B)$.
Por definición $P(A/B^C) = \dfrac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A)-p(A\cap B)}{1-p(B)} = \dfrac{0'3-0'05}{1-0'4} \cong 0'41667$.

EJERCICIO 3

Parte II

Una variable aleatoria X se distribuye de forma Normal, con media μ y desviación típica $\sigma = 0'9$.
a) (1 punto) Una muestra aleatoria de tamaño 9 ha proporcionado los siguientes valores de X:
7'0, 6'4, 8'0, 7'1, 7'3, 7'4, 5'6, 8'8, 7'2.
Obtenga un intervalo de confianza para la media μ, con un nivel de confianza del 97%.
b) (1 punto) Con otra muestra, se ha obtenido que un intervalo de confianza para μ, al 95%, es el siguiente (6'906, 7'494). ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizada?

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una normal N(μ, σ), la *distribución muestral de medias* $\overline{X}$ sigue una normal $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.
Sabemos que el *intervalo de confianza para estimar la media* es:

$$I(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$, que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media.

De $E = z_{1-\alpha/2}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, obtenemos *el tamaño de la muestra* es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$ en $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Si me dan el intervalo de confianza (a,b), tenemos en cuenta que el error es $E = \frac{b-a}{2}$, y que el punto medio del intervalos $\frac{a+b}{2}$, será $\overline{x}$ ó $\hat{p}$, dependiendo del tipo de intervalo.

a)
Una muestra aleatoria de tamaño 9 ha proporcionado los siguientes valores de X:
7'0, 6'4, 8'0, 7'1, 7'3, 7'4, 5'6, 8'8, 7'2.
Obtenga un intervalo de confianza para la media μ, con un nivel de confianza del 97%.

Datos: $\sigma = 0'9$; $n = 9$, $1-\alpha = 97\% = 0'97$, luego $\alpha = 0'03$, $\mu = \overline{x} =(7'0+6'4+8'0+7'1+7'3+7'4+5'6+8'8+7'2)/ =7'2$.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'03/2 = 0'985$, que miramos en la tabla de la N(0,1) y corresponde a **un punto crítico** $z_{1-\alpha/2} = 2'17$.

El intervalo de confianza para estimar la media es: $I(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$

$=\left(7'2-2'17\cdot\frac{0'9}{\sqrt{9}},7'2+2'17\cdot\frac{0'9}{\sqrt{9}}\right)$ = (6'549,7'851).

b)

Con otra muestra, se ha obtenido que un intervalo de confianza para μ, al 95%, es el siguiente (6'906, 7'494). ¿Cuál es el tamaño de la muestra utilizada?

De (6'906, 7'494) = (a,b), sabemos que E = (b-a)/2 = (7'494 - 6'906)/2 = 0'294.

De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, obtenemos *el tamaño de la muestra* es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$

Para terminar el problema necesitamos el punto crítico $z_{1-\alpha/2}$. Seguimos suponiendo que σ = 0'9

Como 1-α = 95% = 0'95, luego α = 0'05

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'05/2 = 0'975, que miramos en la tabla de la N(0,1) y corresponde a **un punto crítico** $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

El tamaño de la muestra pedido es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2=\left(\frac{1'96.0'9}{0'294}\right)^2$ = **36**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes: A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1'8 y 3'3 euros, respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35'6 euros. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.

a) (1 punto) Plantee el sistema de ecuaciones que resolvería el problema anterior.

b) (2 puntos) Resuelva el problema.

Solución

a)

Plantee el sistema de ecuaciones que resolvería el problema anterior.

Llamamos "x" a, lata de conserva tipo A.
Llamamos "y" a, lata de conserva tipo B.
Llamamos "z" a, lata de conserva tipo C.

De "Compramos en total 20 latas", tenemos x + y + z = 20.

De "pesan un total de 10 kg, A latas de 250 g, B latas de 500 g y C latas de 1 kg ", tenemos 0'25x + 0'5y + 1z = 10.

De "cuestan 35'6 euros, A a 1 €, B a 1'8 € y C a 3'3 €", tenemos 1x + 1'8y + 3'3z = 35'6.

El sistema de ecuaciones es:

x + y + z = 20.
0'25x + 0'5y + 1z = 10.
1x + 1'8y + 3'3z = 35'6

El sistema de ecuaciones sin decimales sería:

x + y + z = 20.
1x + 2y + 4z = 40. (he multiplicado por 4)
10x + 18y + 33z = 356. (he multiplicado por 10)

b)

Resuelva el problema.

Sistema de ecuaciones:

x + y + z = 20.
1x + 2y + 4z = 40
10x + 18y + 33z = 356.

Matriz asociada $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&20\\1&2&4&40\\10&18&33&356\end{array}\right)\begin{array}{c}\\F_2-F_1\\F_3-10.F_1\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&20\\0&1&3&20\\0&8&23&156\end{array}\right)\begin{array}{c}\\\\F_3-8.F_2\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&20\\0&1&3&20\\0&0&-1&-4\end{array}\right)$

Sistema escalonado asociado:

x + y + z = 20.
y + 3z = 20
-1z = -4, de donde "z = 4", con lo cual y+12 = 20, luego "y = 8". Entrando en la 1ª x+8+4=20,

resultándonos "x = 8".
La solución del sistema es (x,y,z) = (8,8,4), es decir **se han comprado 8 latas tipo A, 8 latas tipo B y 4 latas tipo C.**

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

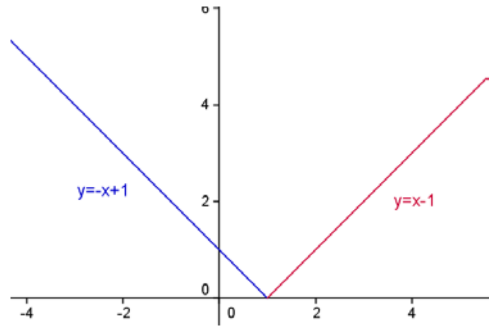
a) (1 punto) Represente gráficamente la función.
b) (1 punto) Estudie la continuidad de la función.
c) (1 punto) Estudie la derivabilidad de la función.

Solución

a)

Represente gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Si observamos las gráficas de las dos ramas son semirrectas, por tanto con un par de valores para rama es suficiente para dibujarlas. En la rama de arriba le damos también el valor "1^*", es decir le damos el uno pero sabiendo que es un valor muy próximo al "1" por la izquierda, pero sin tocarlo.
Un esbozo de las gráficas es:



Observando las gráficas vemos que f(x) es continua en R y derivable en R-{1}.

b)

Estudie la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

Si x < 1, f(x) = -x+1, que es una función polinómica y es continua y derivable en todo R, en particular en x<1.
Si x > 1, f(x) = x-1, que es una función polinómica y es continua y derivable en todo R, en particular en x>1.
Falta ver la continuidad en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$f(1) = -(1)+1 = 0$; $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x+1) = -(1)+1 = 0$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = (1)-1 = 0$. Como los tres valores **son iguales**, la función f(x) **es continua en x = 1**.

c)

Estudie la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x-1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$. (Estamos viendo la continuidad de la derivada).

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (1) = 1$. Como $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, la función f(x) **no es derivable en x = 1**.

EJERCICIO 3

Parte I

A y B son dos sucesos independientes de un mismo experimento aleatorio, tales que

P(A) = 0'4, P(B) = 0'6.

a) (1 punto) Calcule $p(A\cap B)$ y $p(A\cup B)$.
b) (1 punto) Calcule P(A/B) y $P(B/A^C)$.

Solución

a)
Calcule $p(A\cap B)$ y $p(A\cup B)$.

Como me dicen que las sucesos son independientes tenemos $p(A\cap B) = p(A).p(B) = 0'4.0'6 = 0'24$.
Sabemos que $p(A\cup B) = p(A)+ p(B) - p(A\cap B) = 0'4 + 0'6 – 0'24 = 0'76$.
b)
Calcule $P(A/B)$ y $P(B/A^C)$.

Sabemos que $p(A\cap B^C) = p(A) – p(A\cap B)$.
Por definición $P(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{0'24}{0'6} = 0'6$.
Por definición $P(B/A^C) = \dfrac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B)-p(A\cap B)}{1-p(A)} = \dfrac{0'6-0'24}{1-0'4} = 0'6$.

EJERCICIO 3

Parte II

(2 puntos) Tomando, al azar, una muestra de 80 empleados de una empresa, se encontró que 20 usaban gafas. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de empleados de esa empresa que usan gafas.

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones* **p** cuando n (tamaño de la muestra) es suficientemente grande *sigue una distribución normal:* $N(\mathbf{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}) = N(\mathbf{p}, \sqrt{\dfrac{\hat{p}.\hat{q}}{n}})$.

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** es: $I(\mathbf{p})=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\dfrac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\dfrac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right)$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z\approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) =$
$=1-\alpha/2$.

Tomando, al azar, una muestra de 80 empleados de una empresa, se encontró que 20 usaban gafas. Halle, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de empleados de esa empresa que usan gafas.

Datos del problema: $n = 80$; $\hat{p} =20/80 = 0'25$; $\hat{q} = 1- \hat{p} = 1-0'25 = 0'75$; $1 - \alpha = 90\% = 0'9$, de donde $\alpha = 0'1$.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'1/2 = 0'95$, que miramos en la tabla de la N(0,1), y no viene. Los más cercanos son 0'9495 y 0'9505. Elijo 0'9505 que corresponde a **un punto crítico** $z_{1-\alpha/2} = 1'65$.

El intervalo de confianza para estimar la proporción de gafas en los empleados es:
$I(\mathbf{p})=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\dfrac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}.\sqrt{\dfrac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'25 - 1'65.\sqrt{\dfrac{0'25.0'75}{80}}, 0'25 + 1'65.\sqrt{\dfrac{0'25.0'75}{80}}\right) \cong$
$\cong (0'17011, 0'32988)$.