

## OPCIÓN A

**EJERCICIO 1** (3 puntos) Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine X en la ecuación matricial  $X.A - 2B = C$ .

**Solución**

Tenemos que resolver la ecuación matricial  $X.A - 2B = C$ .

De  $X.A - 2B = C$ , tenemos  $X.A = 2.B + C$ . Si  $\det(A) = |A| \neq 0$ , existe la matriz inversa  $A^{-1}$ , y podemos multiplicar por la derecha la expresión " $X.A = 2.B + C$ " por  $A^{-1}$  obteniendo.

$X.A.A^{-1} = (2.B + C).A^{-1}$ , de donde  $X.I_2 = (2.B + C).A^{-1}$ , es decir  $X = (2.B + C).A^{-1}$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{segunda} = (-1)(-2+3) = -1 \neq 0, \text{ luego existe la matriz inversa } A^{-1} = (1/|A|).Adj(A^t). \\ \text{fila} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} -2 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = (1/-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 & -9 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 13 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$X = (2.B + C).A^{-1}; \quad 2.B + C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$\text{Luego } X = (2.B + C).A^{-1} = X = I_3.A^{-1} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -13 & -1 \end{pmatrix}.$$

**EJERCICIO 2**

Sea la función  $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ .

- (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto (0,1).
- (1 punto) Estudie la monotonía de f.
- (1 punto) Halle las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y represente gráficamente la función.

**Solución**

a)

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ , en el punto (0,1).

Al darme el punto (0,1) me están diciendo que calcule la recta tangente en  $x = 0$ , y que  $f(0) = 1$ .

Sabemos que la recta tangente en  $x = 0$  es " $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ ".

De  $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ , tenemos  $f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-1) - (x-1) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}$ , por tanto  $f'(0) = 1/(-1)^2 = 1$ .

La recta tangente pedida es " $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$ ", es decir  $y = x + 1$ .

b)

Estudie la monotonía de f.

Recordamos que la monotonía sale del estudio de la primera derivada.

Si  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente creciente (Se dibuja hacia arriba).

Si  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  es estrictamente decreciente (Se dibuja hacia abajo).

Como  $f'(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$  siempre es mayor que cero, (recordamos que no está definida en  $x = 1/2$ ,  $n^\circ$  que anula

el denominador), **la función f(x) siempre es creciente**, por tanto no tiene ni máximos ni mínimos.

c)

Halle las asíntotas, los puntos de corte con los ejes y represente gráficamente la función  $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ .

Sabemos que el dominio de una función racional es  $\mathbb{R} - \{\text{soluciones denominador} = 0\}$

Las asíntotas verticales (A.V.) suelen ser los números que anulan el denominador, después hay que comprobar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ . Las asíntotas horizontales son las rectas "y = b", con  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ .

$\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{\text{soluciones de } 2x - 1 = 0\} = \mathbb{R} - \{1/2\}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 1/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^+} \frac{x-1}{2x-1} = -0'5/0^+ = -\infty$ , la recta "**x = 1/2**" es una A.V.

$$\lim_{x \rightarrow 1/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2^-} \frac{x-1}{2x-1} = -0'5/0^- = +\infty$$

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x-1} = \{\text{términos de mayor grado}\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1/2) = 1/2$ , la recta "**y = 1/2**" es una A.H.

Sabemos que en los cocientes de funciones polinómicas la A.H. en  $+\infty$  y en  $-\infty$  es la misma.

La función  $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$  es una función homográfica, y su gráfica es una hipérbola con los ejes desplazados.

Dándole un valor a  $f(x)$ , a izquierda y derecha de la A.V.  $x = 1/2$ , sabemos donde está situada. En este caso en el II y IV cuadrante, de los nuevos ejes que son las asíntotas.

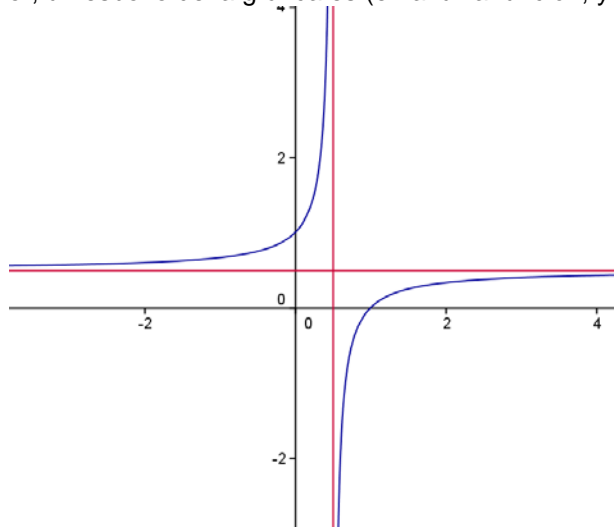
Como me piden los cortes con los ejes estos valdrán:

Para  $x = 0$ ,  $f(0) = 1$ . Punto (0,1), corte con el eje OY.

Para  $f(x) = 0$ , tenemos  $x - 1 = 0$ , de donde  $x = 1$ . Punto (1,0), corte con el eje OX.

También sabemos que la gráfica de una hipérbola nunca toca ni atraviesa las asíntotas.

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica es (en azul la función, y en rojo las asíntotas):



### EJERCICIO 3

#### Parte I

Se consideran dos sucesos A y B, asociados a un espacio muestral, tales que

$$p(A \cup B) = 1, p(A \cap B) = 0'3 \text{ y } p(A/B) = 0'6.$$

a) (1'5 puntos) Halle las probabilidades de los sucesos A y B.

b) (0'5 puntos) Determine si el suceso B es independiente del suceso A.

#### Solución

a)

Halle las probabilidades de los sucesos A y B.

Tenemos  $p(A \cup B) = 1$ ,  $P(A \cap B) = 0'3$  y  $P(A/B) = 0'6$ .

Por otro lado sabemos que  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$  y que  $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

De  $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ , sustituyendo tenemos  $0'6 = 0'3/p(B)$ , por tanto  $p(B) = 0'3/0'6 = 0'5$ .

De  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ , sustituyendo tenemos  $1 = p(A) + 0'5 - 0'3$ , por tanto  $p(A) = 0'8$ .

b)

Determine si el suceso B es independiente del suceso A.

Sabemos que A y B son independientes si  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ .

$p(A \cap B) = 0'3$ , y  $p(A) \cdot p(B) = 0'8 \cdot 0'5 = 0'4$ . Como  $p(A \cap B) = 0'3 \neq 0'4 = p(A) \cdot p(B)$ , los sucesos A y B no son independientes.

**EJERCICIO 3**Parte II

El gasto que hacen las familias españolas en regalos de Navidad sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 84 euros. Para estimar esta media se seleccionó una muestra aleatoria y se obtuvo el intervalo de confianza (509'41; 539'79), con un nivel de confianza del 97%.

- a) (0'5 puntos) ¿Cuál ha sido la media de la muestra escogida?  
 b) (1'5 puntos) ¿Qué tamaño tenía la muestra?

**Solución**

Sabemos que si una variable aleatoria  $X$  sigue una normal  $N(\mu, \sigma)$ , la *distribución muestral de medias*  $\bar{X}$  sigue una normal  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

Sabemos que el *intervalo de confianza para estimar la media* es:

$$I(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  es el *punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$ , que verifica  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para el intervalo de la media.

De  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , obtenemos *el tamaño de la muestra* es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$  en  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

Si me dan el intervalo de confianza (a, b), tenemos en cuenta que el error es  $E = \frac{b-a}{2}$ , y que el punto medio del intervalo, es decir  $\frac{a+b}{2}$ , será  $\bar{x}$  que es *la media muestral*.

a)

¿Cuál ha sido la media de la muestra escogida?

Datos: Intervalo (509'41; 539'79) = (a, b);  $\sigma = 84$ ;  $1 - \alpha = 97\% = 0'97$ , de donde  $\alpha = 0'03$ .

De (a, b) sabemos que **la media muestral es**  $\bar{x} = (a+b)/2 = (509'41 + 539'79)/2 = 524'6$ .

b)

¿Qué tamaño tenía la muestra?

Sabemos que *el tamaño de la muestra* es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$ .

Del intervalo (a, b) sabemos que  $E = (b-a)/2 = (539'79 - 509'41)/2 = 15'19$ .

Sólo me queda calcular el *punto crítico*  $z_{1-\alpha/2}$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'03/2 = 0'985$ , que miramos en la tabla de la  $N(0,1)$  y corresponde a **un punto crítico**  $z_{1-\alpha/2} = 2'17$ .

**El tamaño de la muestra pedido** es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2'17 \cdot 84}{15'19} \right)^2 = 144$ .

**OPCIÓN B****EJERCICIO 1**

a) (1'25 puntos) Plantee, sin resolver, el siguiente problema de programación lineal: "Una empresa fabrica camisas de dos tipos, A y B. El beneficio que obtiene es de 8 euros por cada camisa que fabrica del tipo A, y de 6 euros por cada una del tipo B. La empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las del tipo B han de suponer, al menos, el 60% del total. ¿Cuántas camisas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?"

b) (1'75 puntos) Represente la región definida por las inecuaciones:

$$y \leq x, \quad y + 2x \leq 6, \quad x \leq 4y + 3.$$

Calcule el máximo de  $F(x,y) = y + 2x$  en la región anterior e indique dónde se alcanza.

**Solución**

a)

Plantee, sin resolver, el siguiente problema de programación lineal: "Una empresa fabrica camisas de dos tipos, A y B. El beneficio que obtiene es de 8 euros por cada camisa que fabrica del tipo A, y de 6 euros por cada una del tipo B. La empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las del tipo B han de

suponer, al menos, el 60% del total. ¿Cuántas camisetas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?"

Llamamos "x" camiseta tipo A .

Llamamos "y" camiseta tipo B.

Para determinar las inecuaciones y la función Beneficio F(x,y), ponemos un cuadro de doble entrada que nos lo simplificará.

	Tipo A	Tipo B	Máximo y F(x,y)
Camisas	x	y	100000
Topes camisetas	Más de 0	Más de 60% del total	
Beneficio	8€	6€	8x + 6y

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos las siguientes inecuaciones:

$$x + y \leq 100000; \quad x \geq 0; \quad y \geq 60\% \text{ de } (x+y), \text{ es decir } y \geq 0'6x+0'6y, \text{ luego } 0'4y \geq 0'6x .$$

La función que maximiza el beneficio es  $F(x,y) = 8x + 6y$ .

b)

Represente la región definida por las inecuaciones:

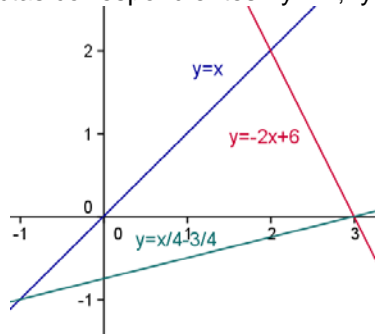
$$y \leq x, \quad y + 2x \leq 6, \quad x \leq 4y + 3.$$

Calcule el máximo de  $F(x,y) = y + 2x$  en la región anterior e indique dónde se alcanza.

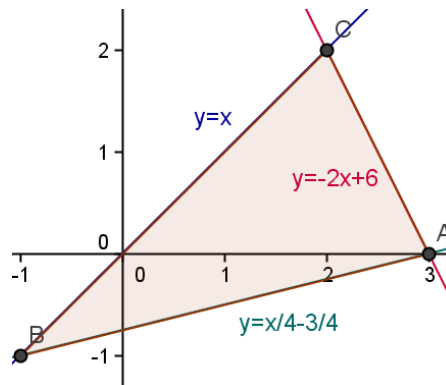
Primeramente transformamos las desigualdades " $y \leq x, \quad y + 2x \leq 6, \quad x \leq 4y + 3$ " en igualdades, y ya su gráfica es una recta,

$$y = x, \quad y + 2x = 6, \quad x = 4y + 3.$$

Despejamos la "y", y dibujamos las rectas correspondientes:  $y = x; \quad y = -2x+6; \quad y = x/4-3/4$ .



Fijándonos en las desigualdades:  $y \leq x; \quad y \leq -2x+6; \quad y \geq x/4-3/4$ , la región factible y sus vértices A, B y C son:



Calculamos los vértices resolviendo las ecuaciones de las rectas de dos en dos:

$$y = x; \quad y = -2x+6; \quad y = x/4-3/4$$

De  $y = -2x+6$  e  $y = x/4-3/4$ , tenemos  $-2x+6 = x/4-3/4$ , de donde  $-8x+24 = x-3$ , luego  $9x = 27$ , por tanto  $x=3$  e  $y=0$  el punto de corte es A(3,0).

De  $y = x$  e  $y = x/4-3/4$ , tenemos  $x = x/4-3/4$ , de donde  $4x = x-3$ , luego  $3x = -3$ , por tanto  $x=-1$  e  $y=-1$  el punto de corte es B(-1,-1).

De  $y = x$  e  $y = -2x+6$ , tenemos  $x = -2x+6$ , de donde  $3x = 6$ , luego  $x = 2$  e  $y = 2$  el punto de corte es C(2,2).

Los vértices de la región son A(3,0), B(-1,-1) y C(2,2).

Consideremos la función  $F(x, y) = y + 2x$ .

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal, afirma que la función F alcanza su máximo y su mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (si

coincide en dos vértices consecutivos, la solución es todo el segmento que los une), por lo que evaluamos  $F$  en los puntos anteriores:

$$F(3,0) = (0) + 2(3) = 6, \quad F(-1,-1) = (-1) + 2(-1) = -3, \quad F(2,2) = (2) + 2(2) = 6.$$

Teniendo en cuenta lo anterior vemos el mínimo absoluto de la función  $F$  en la región es  $-3$  (el valor menor en los vértices) y se alcanza en el punto  $(-1,-1)$ , y el máximo absoluto es  $6$  (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en los puntos  $(3,0)$  y  $(2,2)$ ; por tanto el máximo absoluto se alcanza en todo el segmento que une los puntos  $(3,0)$  y  $(2,2)$ .

## EJERCICIO 2

Sea la función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ .

- a) (1 punto) ¿Es  $f$  continua en  $x = 0$ ? ¿Es continua en su dominio?  
 b) (1 punto) ¿Es  $f$  derivable en  $x = 0$ ? ¿Es derivable en su dominio?  
 c) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

### Solución

a)

¿Es  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  continua en  $x = 0$ ? ¿Es continua en su dominio?

Vemos que el dominio de  $f(x)$  es todo  $\mathbb{R}$ .

$f(x)$  es continua en  $x = 0$  si  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$f(0) = e^{-0} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x}) = e^{-0} = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - x + 1) = 0 - 0 + 1 = 1$ . Como los tres valores **son iguales**, la función  $f(x)$  **es continua en  $x = 0$ , por tanto es continua en su dominio  $\mathbb{R}$ .**

b)

¿Es  $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  derivable en  $x = 0$ ? ¿Es derivable en su dominio?

Vemos que el dominio de  $f(x)$  es todo  $\mathbb{R}$ .

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$  es derivable en  $x = 0$  si  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ . (Estamos viendo la continuidad de la derivada).

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-e^{-x}) = -1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 - 1) = -1$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ , la función  $f(x)$  **es derivable en  $x = 0$ , por tanto es derivable en su dominio  $\mathbb{R}$ .**

c)

Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

Sabemos que la recta tangente en  $x = 1$  es " $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ ".

También sabemos que  $x = 1$  está en la rama  $x > 0$ , luego  $f(x) = x^3 - x + 1$  y  $f'(x) = 3x^2 - 1$ .

De  $f(x) = x^3 - x + 1$ , tenemos  $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$ .

De  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , tenemos  $f'(1) = 3 - 1 = 2$ .

**La recta tangente pedida es " $y - (-1) = (2)(x - 1)$ ", es decir  $y = 2x - 3$ .**

## EJERCICIO 3

### Parte I

El 70% de los visitantes de un museo son españoles. El 49% son españoles y mayores de edad. De los que no son españoles, el 40% son menores de edad.

- a) (1 punto) Si se escoge, al azar, un visitante de este museo, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor de edad?  
 b) (1 punto) Se ha elegido, aleatoriamente, un visitante de este museo y resulta que es menor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que no sea español?

### Solución

Llamemos  $E_s$ ,  $E_s^C = F$ ,  $M$  y  $M^C = N$  a los sucesos siguientes, "visitante español", "visitante no español", "mayor de edad" y "menor de edad", respectivamente.

De "el 70% de los visitantes de un museo son españoles", tenemos  $p(Es) = 70\% = 0'7$ , y por el suceso contrario  $p(F) = 1 - p(Es) = 1 - 0'7 = 0'3$ .

De "el 49% son españoles y mayores de edad", tenemos  $p(Es \cap M) = 49\% = 0'49$ .

De "los que no son españoles, el 40% son menores de edad", tenemos  $p(N/F) = 40\% = 0'4$ .

Trasladamos estos datos a una tabla de contingencia

	Es	Es <sup>C</sup> = F	Totales
Mayor = M	0'49	<b>0'18</b>	<b>0'67</b>
M <sup>C</sup> = N	<b>0'21</b>	0'12	<b>0'33</b>
Totales	0'7	0'3	1

Calculamos de  $p(N/F) = 0'4$ ,  $p(N \cap F)$  para completar la tabla.

$p(N/F) = 0'4 \Rightarrow$  {definición} =  $[p(N \cap F)]/[p(F)]$ , de donde  $p(N \cap F) = p(F) \cdot p(N/F) = 0'3 \cdot 0'4 = 0'12$ .

Los datos en negrita los hemos obtenido sumando o restando de los totales.

a)

Si se escoge, al azar, un visitante de este museo, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor de edad?

Me están pidiendo  $p(M)$ , y la tabla me dice que  $p(M) = 0'67$ .

b)

Se ha elegido, aleatoriamente, un visitante de este museo y resulta que es menor de edad, ¿cuál es la probabilidad de que no sea español?

Me están pidiendo  $p(F/N)$ .

$p(F/N) =$  {por definición} =  $\frac{p(F \cap N)}{p(N)} = (0'12)/(0'33) \cong 0'3636$ .

### EJERCICIO 3

#### Parte II

Los jóvenes andaluces duermen un número de horas diarias que se distribuye según una ley Normal de media desconocida,  $\mu$ , y desviación típica 2 horas. A partir de una muestra de 64 jóvenes se ha obtenido una media de 7 horas.

a) (1 punto) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la media poblacional  $\mu$ .

b) (1 punto) Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media de horas de sueño, cometiendo un error máximo de 0'25 horas?

#### Solución

Sabemos que si una variable aleatoria  $X$  sigue una normal  $N(\mu, \sigma)$ , la *distribución muestral de medias*

$\bar{X}$  sigue una normal  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

Sabemos que el *intervalo de confianza para estimar la media* es:

$$I(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde  $z_{1-\alpha/2}$  es el *punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada  $Z \approx N(0,1)$ , que verifica

$p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , para el intervalo de la media.

De  $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ , obtenemos el *tamaño de la muestra* es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2$  en  $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ .

a)

Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la media poblacional  $\mu$ .

Datos:  $\sigma = 2$ ;  $n = 64$ ;  $\bar{x} = 7$ ;  $1 - \alpha = 97\% = 0'97$ , de donde  $\alpha = 0'03$ .

De  $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'03/2 = 0'985$ , que miramos en la tabla de la  $N(0,1)$  y corresponde a un **punto crítico**  $z_{1-\alpha/2} = 2'17$ .

El intervalo de confianza para estimar la media es:  $I(\mu) = \left( \bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$   
 $= \left( 7 - 2 \cdot 17 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}}, 7 + 2 \cdot 17 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}} \right) = (6'4575, 7'5425).$

b)

Manteniendo la misma confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar la media de horas de sueño, cometiendo un error máximo de 0'25 horas?

Sabemos que *el tamaño de la muestra* es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2.$

**El tamaño de la muestra pedido** es  $n = \left( \frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E} \right)^2 = \left( \frac{2'17.2}{0'25} \right)^2 = 301'3696$ , por tanto **n = 302**.