MATEMÁTICAS CCSS II Sobrantes 2010 (Modelo 1) SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x + y \le 3 \;;\quad -x + y \le 3 \;;\; x \le 2 \;;\; y \ge 0$$

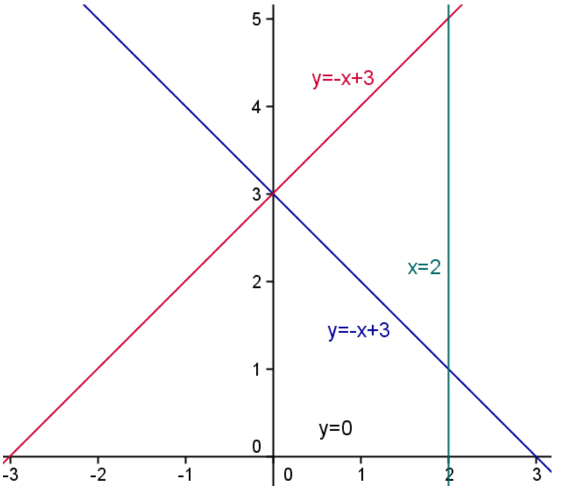
a) (1 punto) Represéntelo gráficamente.
b) (1 punto) Calcule los vértices de dicho recinto.
c) (0'5 puntos) ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de la función objetivo F(x,y) = -2x – y? ¿En qué puntos se alcanzan dichos valores?

Solución

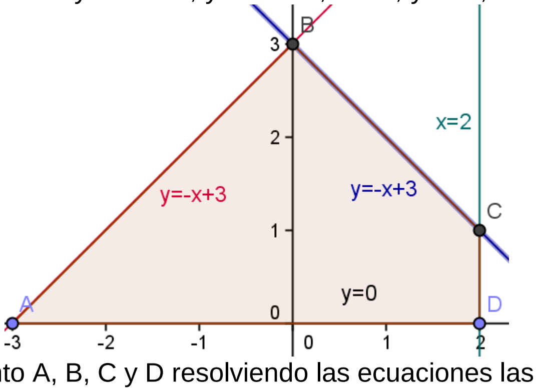
Tenemos las siguientes inecuaciones: $x + y \le 3$; $-x + y \le 3$; $x \le 2$; $y \ge 0$
De las desigualdades pasamos a las igualdades: $x + y = 3$; $-x + y = 3$; $x = 2$; $y = 0$
Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible que indicaremos como la letra "Región factible".

$$y = -x + 3;\ y = x + 3\ ;\ x = 2 \text{ (recta paralela a OY)};\ y = 3 \text{ (recta paralela a OX)}$$

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades "y ≤ -x + 3; y ≤ x + 3 ; x ≤ 2; y ≥ 0", vemos que el recinto factible es:



Calculamos los vértices del recinto A, B, C y D resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y=x+3 e y=0, Tenemos el punto de corte A(-3,0)
De y=x+3 e y = -x+3, tenemos x= 0, y el punto B(0,3)
De y=-x+3 y x=2, tenemos el punto de corte C(2,1)
De x=2 e y=0, tenemos el punto de corte D(2,0)

El recinto tiene por vértices A(-3,0), B(0,3), C(2,1) y D(2,0).

Consideremos la función beneficio F(x,y) = -2x – y.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(-3,0) = -2(-3) – (0) = 6, F(0,3) = -2(0) – (3) = -3, F(2,1) = -2(2) – (1) = -5, F(2,0) = -2(2) – (0) = -4.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 6 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (-3,0), y el mínimo absoluto de F es -5 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (2,1).

EJERCICIO 2

En una empresa han hecho un estudio sobre la rentabilidad de su inversión en publicidad, y han llegado a la conclusión de que el beneficio obtenido, en miles de euros, viene dado por la expresión $B(x)=0'5x^2 - 4x + 6$, siendo "x" la inversión en publicidad, en miles de euros, con *x* en el intervalo [0,10].
a) (1 punto) ¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?
b) (1 punto) ¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?
c) (0'5 puntos) ¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad? ¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?

Solución

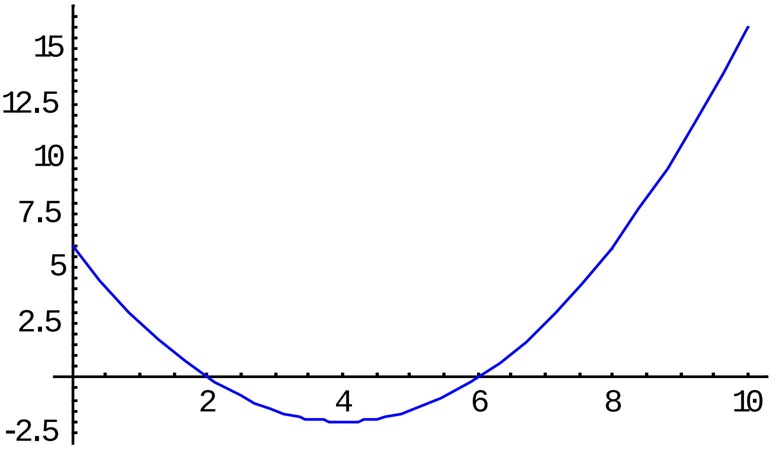
(a)

¿Para qué valores de la inversión la empresa tiene pérdidas?
Beneficio en miles de euros expresión $B(x) = 0'5x^2 - 4x + 6$, con "x" inversión en publicidad en [0,10].

La inversión la empresa tiene pérdidas si B(x) < 0. Resolvemos B(x) = 0.

$0'5x^2 - 4x + 6 = 0$ (a=0'5, b=-4 y c=6), $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{1} = 4 \pm 2$, de donde x = 6 y x = 2.

Como la gráfica de B(x) es una parábola con las graficas hacia arriba (∪) porque a = 0'5 > 0, con abscisa del vértice en x = -b/2a = 4/1 = 4, y ordenada $0'5(4)^2-4(4) + 6 = -2$, resulta que la empresa tiene pérdidas en el intervalo [2,6].
Veámoslo gráficamente



b)
¿Cuánto tiene que invertir la empresa en publicidad para obtener el mayor beneficio posible?
Lo que me están pidiendo es el máximo absoluto de B(x), que se alcanza entre las soluciones de B'(x) = 0, y en los extremos del intervalo x = 0 y x = 10.
De B'(x) = x – 4 = 0, obtenemos x = 4.
Sustituimos estos tres valores en B(x) y el mayor es el buscado (de la gráfica se observa que es en x = 10)
$B(0) = 0'5(0)^2 - 4(0) + 6 = 6$
$B(4) = 0'5(4)^2 - 4(4) + 6 = -2$
$B(10) = 0'5(10)^2 - 4(10) + 6 = 16$
El beneficio máximo que se obtiene es de 16 mil euros y se alcanza para x = 10 mil euros.
c)
¿Cuál es el beneficio si no se invierte nada en publicidad?
¿Hay algún otro valor de la inversión para el cual se obtiene el mismo beneficio?
El beneficio si no se invierte nada (x = 0) es B(0) = 6 mil euros.
Viendo la gráfica se observa que hay otro valor de B(x) = 6, vamos a calcularlo.
$B(x) = 0'5x^2 - 4x + 6 = 6 \rightarrow 0'5x^2 - 4x = 0 = x(0'5x - 4)$, de donde x = 0 y 0'5x – 4 = 0, es decir x = 8. Por tanto se obtiene el mismo beneficio de 6 mil euros no invirtiendo nada (x = 0) o invirtiendo 8 mil euros.

EJERCICIO 3

De dos sucesos aleatorios *A* y *B* del mismo espacio de sucesos se sabe que p(A) = 2/3, p(B) = 3/4 y p(A∩B) = 5/8. Calcule:
a) (0'75 puntos) La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
b) (0'75 puntos) La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
c) (1 punto) La probabilidad de que ocurra *A* si se ha verificado *B*.

Solución

Tenemos p(A) = 2/3, p(B) = 3/4 y p(A∩B) = 5/8.

a)
La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
Me están pidiendo **p(A ó B)** = p(A∪B) = p(A) + p(B) – p(A∩B) = 2/3 + 3/4 - 5/8 = 19/24 ≅ 0'7917
b)
La probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos.
Me están pidiendo **p(noA y noB)** = $p(A^C \cap B^C)$ = {aplicando las leyes de Morgan} = $p((A \cup B)^C)$ = {aplicando la probabilidad del suceso contrario} = 1 - p(A∪B) = 1 - 19/24 = 5/24 ≅ 0'2083
c)
La probabilidad de que ocurra *A* si se ha verificado *B*.
Me están pidiendo **p(A/B)** = $\frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{5/8}{3/4}$ = 5/6 ≅ 0'8333

EJERCICIO 4

a) (1'25 puntos) En una población de 2000 hombres y 2500 mujeres se quiere seleccionar una muestra de 135 personas mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?
b) (1'25 puntos) Dada la población {6,8,11,a}, ¿cuánto debe valer *a* sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 10'3?

Solución

a)
En una población de 2000 hombres y 2500 mujeres se quiere seleccionar una muestra de 135 personas mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{2000} = \frac{n_2}{2500} = \frac{135}{4500}$

De $\frac{n_1}{2000} = \frac{135}{4500}$, tenemos $n_1 = \frac{135.2000}{4500}$ = 60 hombres.

De $\frac{n_2}{2500} = \frac{135}{4500}$, tenemos $n_2 = \frac{135.2500}{4500}$ = 75 mujeres.

b)
Dada la población {6,8,11,a}, ¿cuánto debe valer *a* sabiendo que la media de las medias muestrales de tamaño 3, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es 10'3?

Sabemos que para poblaciones infinitas o para poblaciones finitas en las que el muestreo se ha hecho con reemplazamiento, la media de la distribución muestral de medias de las muestras coincide con la media de la población, es decir $\mu(\overline{X}) = \mu$, siendo μ la media de la población y $\mu(\overline{X})$ la media de las muestras, y que la desviación típica de $\overline{X}$ es $\sigma/\sqrt{(n)}$, es decir $\sigma(\overline{X}) = \sigma/\sqrt{(n)}$.

En nuestro caso $\mu(\overline{X})$ = 10'3 = μ = (6+8+11+a)/4, es decir 10'3 = (25+a)/4, de donde a = 4x10'3 – 25 = = 16'2.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1 punto) Sean A, B y C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto de matrices A.B.C es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.

b) (1'5 puntos) Halle la matriz X que verifica $I_2 - 2X = A.(A - B^t)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución

a)

Sean A, B y C matrices con 2, 3 y 2 filas respectivamente. Sabiendo que el producto de matrices A.B.C es posible y que el resultado es una matriz con 4 columnas, halle las dimensiones de dichas matrices.

Sabemos que para que se puedan realizar matrices el nº de columnas de la 1ª matriz tiene que coincidir con el nº de filas de la 2ª matriz, y que el resultado del producto tiene filas de la 1ª y columnas de la última.

$A_{2xm} .B_{3xn} .C_{2xq} = D_{2x4}$

Observando lo anterior tenemos que m = 3, n = 2 y q = 4

b)

Halle la matriz X que verifica $I_2 - 2X = A.(A - B^t)$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

De $I_2 - 2X = A.(A - B^t)$, tenemos $I_2 - A.(A - B^t) = 2X \rightarrow X = (1/2)[\,I_2 - A.(A - B^t)\,]$

$A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

$A.(A - B^t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I_2 - A.(A - B^t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Luego $X = (1/2)[\,I_2 - A.(A - B^t)\,] = (1/2).\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}.B(I_2 - A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -23 & -5 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función.

b) (1 punto) Represéntela gráficamente.

Solución

a)

Estudie la continuidad y derivabilidad de la función.

La función 2/x es una hipérbola por tanto es continua y derivable en R- {0} (números que anulan el denominador), en particular es continua y derivable en $(-\infty,1) - \{0\}$

La función $x^2 - 4x + 5$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en $(1,+\infty)$

Veamos la continuidad y derivabilidad en x = 1

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$

$f(1) = 2/1 = 2$; $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \dfrac{2}{x} = 2/1 = 2$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} (x^2 - 4x + 5) = 1-4+5 = 2$. Como los tres valores son iguales, la función f(x) es continua en x = 1, luego f(x) es continua en R – {0}. Como no es continua en 0 tampoco es derivable en 0.

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si } x \le 1. \text{ Salvo } x = 0 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{x^2} & \text{si } x < 1. \text{ Salvo } x = 0 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

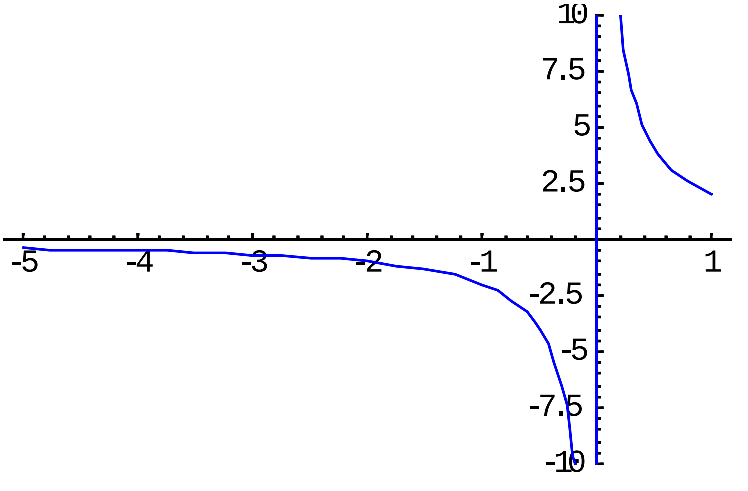
$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{-2}{x^2} = -2/1 = -2$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x-4) = 2-4 = -2$, como ambos valores coinciden la función es derivable en x = 1, por tanto f(x) es derivable en R – {0}, luego $f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{x^2} & \text{si } x < 1. \text{ Salvo } x = 0 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b)
Represéntela gráficamente.

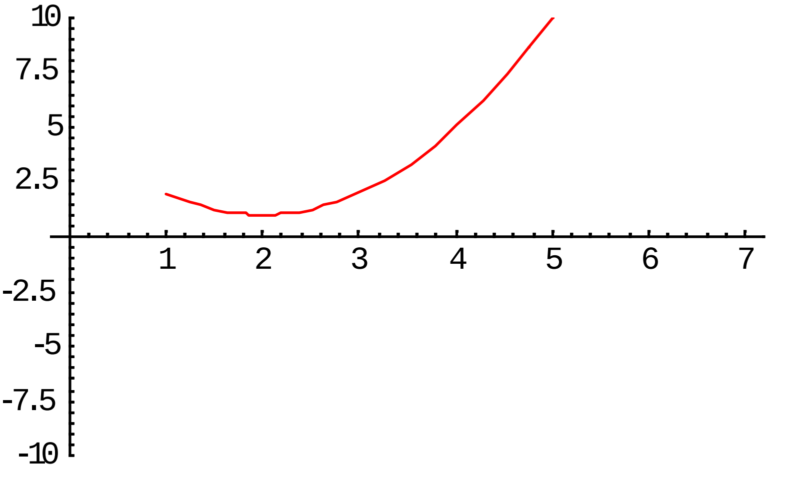
$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \le 1. \text{ Salvo } x = 0 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Sabemos que la gráfica de 2/x es una hipérbola que tiene como asíntota vertical la recta x = 0 ($\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$), y como asíntota horizontal la recta y = 0 ($\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x} = 0$). Si le damos el valor x = 1 obtenemos f(1) = 2, por tanto la hipérbola está situada en el primer y tercer cuadrante. Sólo la dibujaremos hasta el 1.
Sabemos que la gráfica de $x^2 - 4x + 5$ (a= 1, b=-4, c=5) es una parábola con las ramas hacia arriba (∪) porque a = 1 > 0, la abscisa del vértice en x = -b/2a = 4/2 = 2, y su ordenada en $(2)^2 - 4(2) + 5 = 1$, por tanto como el vértice V(2,1) está por encima del eje OX, por lo tanto no lo corta nunca. Si le damos a x el valor 3 tenemos $(3)^2 - 4(3) + 5 = 2$. Ya hemos visto que en x = 1 valía 2.

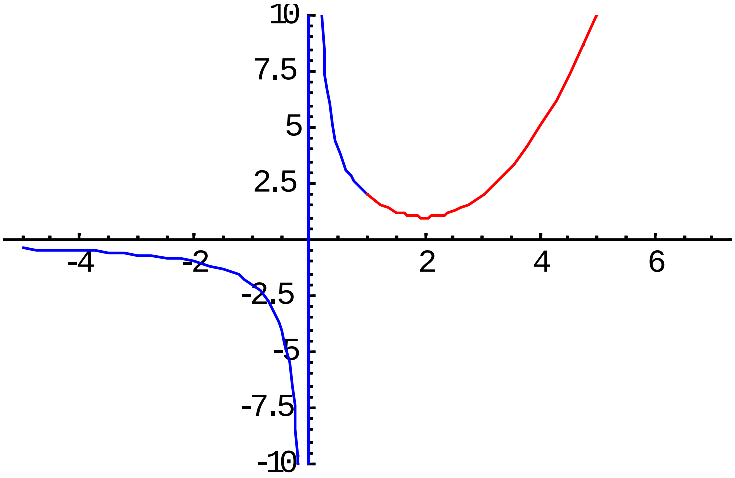
Un esbozo de 2/x en x ≤ 1 es



Un esbozo de $x^2 - 4x + 5$ en x > 1 es



Un esbozo de f(x) es



EJERCICIO 3

El 60% de los camareros de una localidad tienen 35 años o más, y de ellos el 70% son dueños del local donde trabajan. Por otra parte, de los camareros con menos de 35 años sólo el 40% son dueños del local donde trabajan.

a) (1.25 puntos) Seleccionado un camarero al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea dueño del local?

b) (1.25 puntos) Elegido al azar un camarero dueño de su local, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 35 años?

Solución

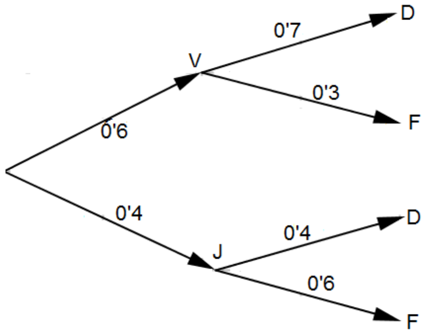
Llamemos V, V^C = J, D y F = D^C a los sucesos siguientes, “camarero con 35 años a más”, "camarero con menos de 35 años", "camarero dueño del local " y "camarero no dueño del local ", respectivamente.

El 60% de los camareros de una localidad tienen 35 años o más, luego p(V) = 0'6, y entonces p(J) = 0'4 ya que sabemos que son sucesos contrarios, ó bien la suma de las ramas de un nodo tiene que ser 1.

De ellos el 70% son dueños del local donde trabajan, lo que significa que p(D/V) = 0'7.

Los camareros con menos de 35 años sólo el 40% son dueños del local donde trabajan, es decir, p(D/J) = 0'4.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

Seleccionado un camarero al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea dueño del local?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que llegue tarde a clase (R) es:

$$p(F) = p(V).p(F/V) + p(J).p(F/J) = 0'6.0'3 + 0'4.0'6 = 0'42.$$

b)

Elegido al azar un camarero dueño de su local, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 35 años?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(J/D) = \frac{p(J \cap D)}{p(D)} = \frac{p(J).p(D/J)}{1 - p(F)} = \frac{0'4.0'4}{0'58} \cong 0'2759$$

EJERCICIO 4

(2.5 puntos) Una máquina de envasado está diseñada para llenar bolsas con 300 g de almendras. Para comprobar si funciona correctamente, se toma una muestra de 100 bolsas y se observa que su peso medio es de 297 g. Suponiendo que la variable “peso” tiene una distribución Normal con varianza 16, y utilizando un contraste bilateral ¿es aceptable, a un nivel de significación de 0'05, que el funcionamiento de la máquina es correcto?

Solución

Sabemos que si tenemos una población que sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Datos dados: $\mu_0 = 300$, n = 100, varianza = $\sigma^2 = 16$, luego $\sigma = 4$, $\overline{x} = 297$

Etapa 1: Las hipótesis son: H_0: $\mu = 300$ g y H_1: $\mu \neq 300$ g.

Etapa 2: La prueba es bilateral y para un nivel de significación $\alpha = 0'05$, con lo cual $\alpha/2 = 0,05/2 = 0'025$. De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$, mirando en las tablas de la N(0,1) obtenemos $z_{1-\alpha} = 1'96$, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha} = 1'96$ y $z_{\alpha} = - z_{1-\alpha} = -1'96$, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.

Etapas 3 y 4: En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{297 - 300}{4/\sqrt{100}} = -7'5$, puesto que $\overline{x} = 1127$, $\mu_0 = 1145$, $\sigma = 241$ y n = 600.

Etapa 5: Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -7'5$ **es menor que el valor crítico** $z_{\alpha/2} = -1'96$, vemos que se encuentra en la zona de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la aceptar hipótesis nula H_0**: $\mu = 300$ g, a este nivel de significación.

En consecuencia, podemos rechazar la hipótesis nula H_0 **y aceptar que la máquina de embasado no llena las bolsas con 300 g, sino con menos gramos al nivel de significación 0'05**, pudiendo haber cometido un error del tipo I.