MATEMÁTICAS CCSS II Sobrantes 2010 (Modelo 1) SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y C = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Halle los valores de *a* y *b* para que se verifique: $A - B + A.B^t = C$
b) (0'75 puntos) ¿Existe algún valor de *b* para el que el producto $B.B^t$ sea igual a la matriz nula?
c) (0'75 puntos) Para a = 0'5 y b = 1, halle la matriz X que verifica la igualdad A.X + B = O (O representa la matriz nula).

Solución

a)
Halle los valores de *a* y *b* para que se verifique: $A - B + A.B^t = C$

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a-1 & 1-b \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & 3 \\ 2b & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, de donde $\begin{pmatrix} 2a+b-1 & 4-b \\ 2b & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, e igualando miembro a miembro

2a+b-1 = 1
4-b = 3
2b = 2, de donde **b = 1**, que verifica 4-b= 3. Entrando con b = 1 en 2a+b-1 = 1, tenemos 2a = 1 $\rightarrow$ **a = 1/2**

b)
¿Existe algún valor de *b* para el que el producto $B.B^t$ sea igual a la matriz nula?
$B.B^t = O_2$

$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1+b^2 & 3b \\ 3b & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e igualando miembro a miembro vemos que es absurdo porque 9 $\neq$ 0, y de 3b = 0 obtenemos b = 0, que no verifica $1+b^2 = 0$ por tanto **no hay ningún valor de "b"** que satisfaga $B.B^t = O_2$.

c)
Para a = 0'5 y b = 1, halle la matriz X que verifica la igualdad A.X + B = O (O representa la matriz nula).

A = $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

De A.X + B = O, tenemos A.X = O – B = - B. Si admite matriz inversa A^{-1} (si la admite y lo veremos en seguida) multiplicando la expresión A.X = - B por A^{-1} tenemos $A^{-1}.A.X = (A^{-1})(-B) \rightarrow X = -A^{-1}.B$

Sabemos que A tiene inversa si mediante transformaciones elementales de Gauss por filas, podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1/2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1(2) \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1\text{-}F_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (F_2)/2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$, luego la matriz inversa es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

También se puede calcular la inversa por determinantes.

A tiene inversa si su determinante |A| es distinto de 0, y la inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$

$|A| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (1/2).(2) - 0 = 1 \neq 0$, luego existe $A^{-1} = \frac{1}{|A|}.Adj(A^t)$

A = $\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$$X = -A^{-1}.B = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

Sean las funciones $f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ -x^2 - x + 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$,

a) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en x = 0.

b) (1 punto) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función h en x = 0.
c) (0'5 puntos) Si las dos funciones anteriores representan el perfil de un arco puntiagudo de una catedral y el de un arco redondeado (sin picos) de un túnel, indique, razonadamente, la que corresponde a la catedral y la que corresponde al túnel.

Solución

a)
Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función f en x = 0.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 2 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Veamos la continuidad y derivabilidad en x = 0

f(x) es continua en x = 0 si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0)=(0)^3-(0)^2+2=2$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^3- x^2+2)=(0)^3 -(0)^2+2=2$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2- 4x+5)= 0-0+5 = 5$. Como los tres valores **no son iguales**, la función f(x) **no es continua en x = 0**, y por tanto **tampoco es derivable en x = 0**.

b)
Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función h en x = 0.

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -x^2 - x + 2 & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases},$$

Veamos la continuidad y derivabilidad en x = 0

f(x) es continua en x = 0 si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

$f(0)=-(0)^2+(0)+2=2$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x^2+ x+2)= -(0)^2+(0)+2=2$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x^2- x+2)= -(0)^2-(0)+2=2$. Como los tres valores **son iguales**, la función f(x) **es continua en x = 0**.

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ -x^2 - x + 2 & \text{si } 0 < x \le 1 \end{cases}, \quad h'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -2x - 1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases},$$

h(x) es derivable en x = 0 si $\lim_{x\to 0^-} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} h'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 0^-} h'(x) = \lim_{x\to 0^-} = (-2x+1) = 0+1 = 1$; $\lim_{x\to 0^+} h'(x) = \lim_{x\to 0^+} = (-2x-1) = 0-1 = -1$, como **ambos valores no coinciden** la función **h(x) no es derivable en x = 0**.

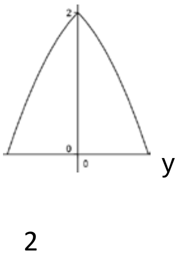
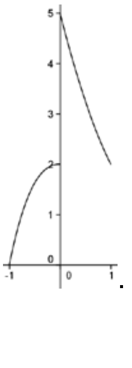
c)
Si las dos funciones anteriores representan el perfil de un arco puntiagudo de una catedral y el de un arco redondeado (sin picos) de un túnel, indique, razonadamente, la que corresponde a la catedral y la que corresponde al túnel.

Creo que la pregunta está mal expresada, porque la expresión *perfil de un arco puntiagudo* no presupone que no sea continua, y la expresión *redondeado (sin picos)* nos puede indicar que es continua y derivable (redondeado) y la palabra *sin pico* que es derivable en dicho punto (rectas tangentes iguales a izquierda y derecha); lo cual no coincide con ninguna, pues f(x) no es continua ni derivable en 0, y h(x) es continua pero no derivable en 0.

Como la que es continua en x = 0, aunque no derivable es la función h(x), podemos suponer que h(x) se refiere al túnel y f(x) a la catedral.

Sigo diciendo que no me convence el enunciado.

Aunque no lo piden se podría hacer la gráfica de h(x) pues son dos trozos de parábola, sin embargo la de f(x) tiene un trozo que es una cúbica, y es un poquito mas complicada. Y como este apartado cuenta 0'5 puntos creo que deberían haberlo expresado mejor pues no tendrían que calcular las gráficas.

Hechas estas observaciones la gráfica de h(x) es  y a gráfica de f(x) es . Por tanto h(x) es el túnel.

EJERCICIO 3

Una empresa utiliza dos servidores para conectarse a Internet. El primero, S_1, lo utiliza el 45% de las veces y el segundo, S_2, el resto.
Cuando se conecta a Internet con S_1, los ordenadores se bloquean el 5% de las veces, y cuando lo hace con S_2 el 8%. Si un día, al azar, la empresa está conectada a Internet,
a) (1'25 puntos) ¿cuál es la probabilidad de que los ordenadores se queden bloqueados?
b) (1'25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa esté utilizando el servidor S_1, sabiendo que los ordenadores se han quedado bloqueados?

Solución

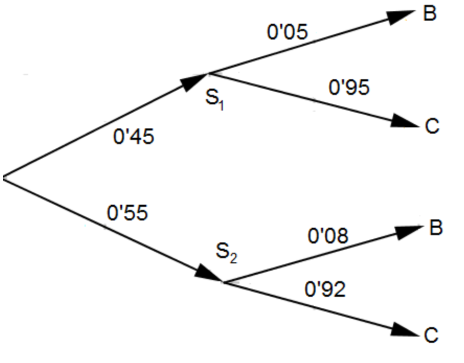
Llamemos S_1, S_2, B y C = B^C a los sucesos siguientes, "servidor S_1", "servidor S_2", "bloqueado " y "no bloqueado ", respectivamente.

S_1, lo utiliza el 45% de las veces y el segundo, S_2, el resto. → $p(S_1)$ = 45% = 0'45, $p(S_2)$ = 55% = 0'55, puesto que son suceso contrarios y la suma de sus probabilidades es 1. Como vamos a utilizar un diagrama de árbol la suma de las ramas que partes de un nodo es 1.

Cuando se conecta a Internet con S_1, los ordenadores se bloquean el 5% de las veces, lo que significa que $p(B/S_1)$ = 5% = 0'05.

Cuando se conecta a Internet con S_2, los ordenadores se bloquean el 8% de las veces, lo que significa que $p(B/S_2)$ = 8% = 0'08.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
¿cuál es la probabilidad de que los ordenadores se queden bloqueados?
Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que llegue tarde a clase (R) es:

$$p(B) = p(S_1).p(B/S_1) + p(S_2).p(B/S_2) = 0'45.0'05 + 0'55.0'08 = 0'0665.$$

b)
¿Cuál es la probabilidad de que la empresa esté utilizando el servidor S_1, sabiendo que los ordenadores se han quedado bloqueados?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$p(S_1/B) = \frac{p(S_1 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(S_1).p(B/S_1)}{p(B)} = \frac{0'45.0'05}{0'0665} \cong 0'3383$$

EJERCICIO 4

De una muestra aleatoria de 350 individuos de una población, 50 son adultos.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza, al 98%, para la proporción de adultos de esa población.
b) (1 punto) ¿Puede admitirse, a ese nivel de confianza, que la proporción de adultos de esa población es 2/15?

Solución

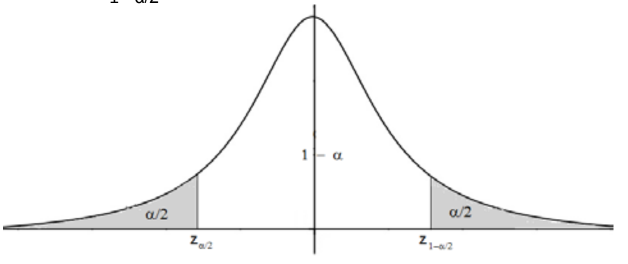
a)
Para construir el intervalo:

- Se elige un *estimador* del parámetro que se desea estimar ($\overline{X}$ para **μ**, y $\hat{p}$ para **p**), en nuestro caso es de proporción luego es $\hat{p} = \frac{50}{350} = \frac{1}{7}$.
- Se elige *un nivel de confianza 1 – α* con el que se desea construir el intervalo, que nos lo dan y es del 98%, es decir 1 – α = 98% = 0'98, de donde α = 0'02 = 2% como *nivel de significación*.

- El intervalo centrado en el estadístico $\hat{p}$ obtenido en la muestra sería:

$$I.C. = I(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \text{ para estimar } \mathbf{p}$$

Donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ tal que $p(-z_{1-\alpha/2} \le Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$.
De esa igualdad se deduce que $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$, que se mira en la tabla de la Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$.



$p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - (0'02)/2 = 0'99$, mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor más próximo a 0'99 es 0.9901, que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'33$. Por tanto el intervalo de confianza pedido es

$$I.C.=I_{100(1-\alpha)\%}(\mathbf{p})=\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{1}{7} - 2'33\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}}{350}}, \frac{1}{7} + 2'33\cdot\sqrt{\frac{\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}}{350}}\right) \cong$$

$\cong$ (0'142857 – 0'018704 ; 0'142857 + 0'018704) = (0'129866; 0'167274)
b)
¿Puede admitirse, a ese nivel de confianza, que la proporción de adultos de esa población es 2/15?

El valor 2/15 se puede admitir a ese nivel de confianza, si está dentro del intervalo de confianza. Como 2/15= 0'0133333, **está fuera del intervalo** (0'129866; 0'167274), **no podemos admitir que la proporción de adultos de la población es 2/15**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (2 puntos) Represente la región definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x \le 2; \quad y \ge -4x + 8; \quad 3y - 4x - 16 \le 0$$

b) (0'5 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función F(x,y) = 3x - y, y los puntos donde se alcanzan.

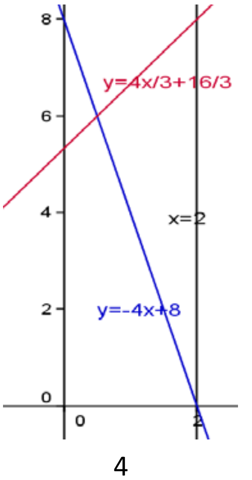
Solución

Tenemos las siguientes inecuaciones: $x \le 2$; $y \ge -4x + 8$; $3y - 4x - 16 \le 0$

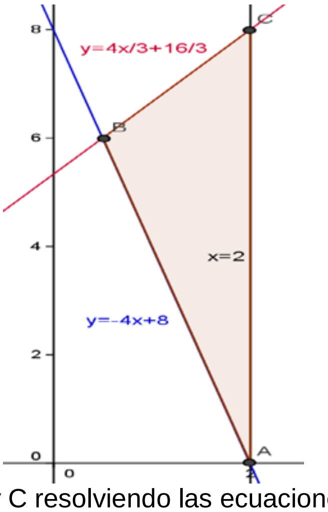
De las desigualdades pasamos a las igualdades: $x = 2$; $y = -4x + 8$; $3y - 4x - 16 = 0$
Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible que indicaremos como la letra "Región factible".

$$x = 2 \text{ (recta paralela a OY)}; \; y = -4x + 8; \; y = 4x/3 + 16/3$$

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades "$x \le 2$; $y \ge -4x + 8$; $y \le 4x/3+16/3$", vemos que el recinto factible es:



Calculamos los vértices del recinto A, B y C resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = -4x+8$ y $x=2$, Tenemos el punto de corte A(2,0)
De $y = -4x+8$ e $y = 4x/3+16/3$, tenemos $-4x+8 = 4x/3+16/3$, es decir $-12x+24 = 4x+16$, luego $8 = 16x$, por tanto $x = 1/2$ e $y = -2+8 = 6$, y obtenemos el punto B(1/2,6)
De $y = 4x/3+16/3$ y $x=2$, tenemos $y = 8/3+16/3 = 24/3 = 8$, y el punto de corte es C(2,8)
De $x=2$ e $y=0$, tenemos el punto de corte D(2,0)

El recinto tiene por vértices A(2,0), B(1/2,6) y C(2,8).

Consideremos la función $F(x,y) = 3x - y$.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

$F(2,0) = 3(2) – (0) = 6$, $F(1/2,6) = 3(1/2) - 6 = -4'5$, $F(2,1) = 3(2) – (8) = -2$.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región factible es 6 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (2,0), y el mínimo absoluto de F es -4'5 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto (1/2,6).

EJERCICIO 2

El gerente de una empresa sabe que los beneficios de la misma, f(x), dependen de la inversión, *x*, según la función $f(x) = -x^2 + 11x - 10$. (*x* es la cantidad invertida, en millones de euros).
a) (0'75 puntos) Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio es no negativa.
b) (1 punto) Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?
c) (0'75 puntos) ¿Entre qué valores ha de estar comprendida la inversión para que el beneficio sea creciente, sabiendo que éste es no negativo?

Solución

a)
Determine los valores de la inversión para los que la función beneficio f(x) es no negativa.
Me están pidiendo los valores de "x" para los cuales $f(x) \ge 0$
La gráfica de la función $f(x) = -x^2 + 11x – 10$ ($a = -1$, $b = 11$, $c = -10$) es una parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), porque $a = -1 < 0$. Si calculamos las soluciones de $f(x) = 0$, los valores que me piden de "x" son los que están entre las soluciones de $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \rightarrow -x^2 + 11x – 10 = 0 = x^2 - 11x + 10 \rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{121-40}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2}$, de donde $x = 10$ y $x = 1$. Los valores pedidos son los comprendidos entre 1 y 10.

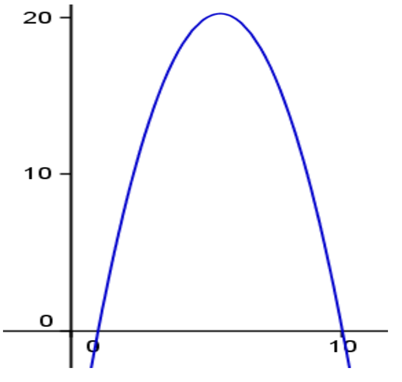
b)
Halle el valor de la inversión para el cual el beneficio es máximo. ¿A cuánto asciende éste?
Como las ramas de la parábola van hacia abajo el beneficio máximo se encuentra en el vértice de la parábola (su abscisa anula la 1ª derivada).
$f(x) = -x^2 + 11x – 10$; $f'(x) = -2x + 11$.

De f'(x) = 0, tenemos -2x + 11= 0, es decir x = 5'5.
Veamos que es un máximo, viendo que su segunda derivada es menor que 0.
f'(x) = -2x + 11; f''(x) = -2 $\rightarrow$ f''(5'5) = -2 < 0, luego es un máximo.
El valor de la inversión es "x = 5'5 millones de euros" y el "beneficio máximo es f(5'5) = -(5'5)^2 + 11(5'5) – 10= = 20'25 millones de euros".

c)
¿Entre qué valores ha de estar comprendida la inversión para que el beneficio sea creciente, sabiendo que éste es no negativo?

Sabemos que esta parábola crece desde $-\infty$ hasta la abscisa del vértice, como es no negativa, en nuestro caso crece entre 1 y 5'5 millones de euros.

Aunque no lo piden la gráfica de f(x) es



EJERCICIO 3

En un centro de enseñanza secundaria se sabe que el 45% de los alumnos juegan al fútbol, que el 60% practican atletismo, y que de los que practican atletismo el 50% juegan al fútbol.
a) (0'75 puntos) ¿Qué porcentaje de alumnos practican ambos deportes?
b) (0'75 puntos) Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de estos deportes?
c) (1 punto) Si un alumno de ese centro no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?

Solución

Sean F y A los sucesos "juegan al fútbol" y "practican atletismo", respectivamente.
De, el 45% de los alumnos juegan al fútbol tenemos p(F) = 45% = 0'45
De, el 60% practican atletismo tenemos p(A) = 60% = 0'60
Y que de los que practican atletismo el 50% juegan al fútbol, tenemos p(F/A) = 50% = 0'50

a)
¿Qué porcentaje de alumnos practican ambos deportes?
La probabilidad de que se verifique alguno de los dos sucesos.
Me están pidiendo **p(F y A)** = p(F$\cap$A)
Sabemos que p(F/A) = $\frac{p(F \cap A)}{p(A)}$, de donde p(F$\cap$A) = p(A).p(F/A) = 0'6.0'5 = 0'30 = 30%
b)
Si se elige al azar un alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que no practique ninguno de estos deportes?

Me están pidiendo **p(noF y noA)** = p(F$^C\cap$A^C) = {aplicando las leyes de Morgan} = p((F$\cup$A)^C) = {aplicando la probabilidad del suceso contrario} = 1 - p(F$\cup$A) = 1 - 0'75 **= 1/4 = 0'25.**

Necesitamos p(F$\cup$A) = p(F) + p(A) – p(F$\cap$A) = 0'45 + 0'60 – 0'30 = 0'75
c)
Si un alumno de ese centro no juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que practique atletismo?
Me están pidiendo **p(A/noF)** = $\frac{p(A \cap F^C)}{p(F^C)} = \frac{p(A)-p(A \cap F)}{1-p(F)} = \frac{0'6-0'3}{1-0'45} \cong$ 0'5454

EJERCICIO 4

(2'5 puntos) Se sabe que los años de vida de los individuos de una población es una variable aleatoria Normal con desviación típica 8'9 años. Una muestra aleatoria de 100 individuos de esa población mostró una vida media de 71'8 años. Mediante un contraste de hipótesis unilateral, ¿puede afirmarse con los datos anteriores que la vida media es mayor de 70 años, a un nivel de significación α = 0'05?

Solución

Sabemos que si una variable aleatoria X sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Como nos dicen que mediante un contraste de hipótesis unilateral, se puede afirmar que la vida media es mayor de 70 años, tenemos que la hipótesis nula que se desea contrastar es $H_0 : \mu \geq 70$, frente a la hipótesis alternativa de este contraste que sería $H_1 : \mu < 70$, que me dá la dirección de la región crítica.

El *estadístico de prueba* de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1).

Datos dados: μ_0 = 70 años; $\overline{x}$ = 71'8 años; desviación típica σ = 8'9 años; n=100; nivel de significación α = 0'05.

Calculo de la región crítica para el nivel de significación α = 0'05

El valor critico correspondiente es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$

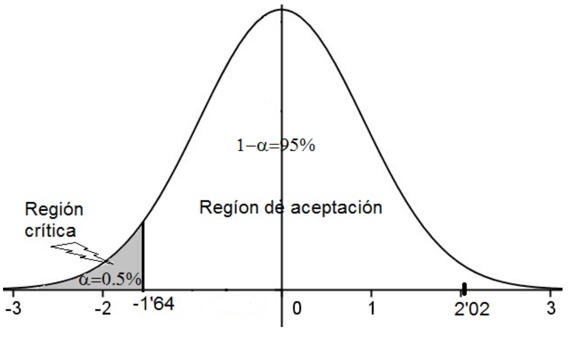
Sabemos que $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0.05 = 0'95$, que se mira en la tabla de la distribución Normal, y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha}$. Vemos en la tabla de la N(0,1) que el valor más próximo a 0'95 es 0.9495 o 0.9505. Como vemos está en la mitad, no obstante elegimos 0.9495, que corresponde a $z_{1-\alpha}$= 1'64.
Por tanto $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - z_{0'95} \cong -1'64$.

Entonces la región crítica o de rechazo está formada por los números reales situados a la izquierda de los números "-1'64".

Cálculo del valor observado del estadístico de contraste:

$$z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{71'8-70}{8'9/\sqrt{100}} \cong 2'02$$

Resultado del contraste:



Como el valor observado 2'02 está a la derecha de -1'64 porque -1'64 < -0'63, el valor observado 2'02 se encuentra en la región de aceptación correspondiente al nivel 0'05, por lo cual ***se acepta la hipótesis nula*** $H_0 : \mu \geq 70$ a este nivel.

En consecuencia, se acepta la hipótesis nula $H_0 : \mu \geq 70$, es decir la vida media de la población es mayor de 70 años al nivel de significación 0'05, pudiendo haber cometido un error del tipo II.