SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SEPTIEMBRE 2013 MODELO 3 RESERVA 1

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

a) (1'25 puntos) Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Determine la matriz X que verifica $B\cdot X = 3A + A^t$.

b) (1'25 puntos) Calcule la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Solución

a)

Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Determine la matriz X que verifica $B\cdot X = 3A + A^t$.

S la matriz B tiene matriz inversa B^{-1}, (podemos pasar de $(B|I_2)$ mediante transformaciones elementales a $(I_2|C)$, la matriz C es B^{-1}), podemos multiplicar la expresión matricial $B\cdot X = 3A + A^t$ por la izquierda por la matriz B^{-1}.

$$(B|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2 - 2\cdot F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 + F_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1)F_2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) = (I_2|B^{-1}), \text{ por tanto } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

También la podíamos ver por la fórmula $B^{-1} = 1/(|B|)\cdot Adj(B^t)$.

$|B| = det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$, luego existe B^{-1}. $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, luego $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

De $B\cdot X = 3A + A^t$, tenemos $B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}\cdot(3A + A^t) \rightarrow I_2\cdot X = B^{-1}\cdot(3A + A^t) \rightarrow X = B^{-1}\cdot(3A + A^t)$

Luego $\mathbf{X} = B^{-1}\cdot(3A + A^t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^t\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 15 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$.

b)

Calcule la matriz Y que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Sabemos que el producto de matrices es posible si el nº de columnas de la 1ª coincide con el nº de filas de la 2ª, y el resultado es filas de la 1ª y columnas de la 2ª; es decir $A_{mx\mathbf{p}}\cdot B_{\mathbf{p}xn} = C_{mxn}$.

En nuestro caso $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}_{3x2}\cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix}_{3x1}$, por tanto Y tiene que ser de orden 2x1, es decir Y_{2x1}, es decir

$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

De $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a+5b \\ a-5b \\ 2a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2a + 5b = 6 \\ a - 5b = -12 \\ 2a - b = -6 \end{cases}$.

Resolvemos las dos primeras ecuaciones y vemos si la solución verifica la tercera ecuación.

$2a + 5b = 6$ (F_1-2F_2) $\rightarrow$ $15b = 30$, de donde **b = 2.**

$a - 5b = -12$ $\rightarrow$ $a - 5b = -12$. Sustituyendo b = 2 tenemos **a =** $-12 + 5(2)$ **= -2.**

Comprobamos que a = -2 y b = 2 verifican $2a - b = -6 \rightarrow 2(-2) - (2) = -6$, lo cual es cierto.

La matriz pedida es Y = $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

EJERCICIO 2 (A)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x + 3 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad y derivabilidad de f(x) en su dominio.
b) (1 punto) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) (0'5 puntos) Calcule los extremos relativos.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x + 3 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

a)
Estudie la continuidad y derivabilidad de f(x) en su dominio.

Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua.
$2x^2 - 12$ es una función continua y derivable en R, en particular en x < -3.
-x + 3 es una función continua y derivable en R, en particular en -3 < x < 2.
x – 1 es una función continua y derivable en R, en particular en x > 2.

Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = -3 y x = 2.

f(x) es continua en x = -3 si $f(-3) = \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x)$.

$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (2x^2 - 12) = 2(-3)^2 - 12 = 6$;

$f(-3) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (-x + 3) = -(-3) + = 6$, por tanto f(x) es continua en x = -3.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-x + 3) = -(2) + 3 = 1$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x - 1) = (2) - 1 = 1$, por tanto f(x) es continua en x = 1.

Recapitulando **f es continua en R**.

De $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12 & \text{si} \quad x < -3 \\ -x + 3 & \text{si} \quad -3 \le x \le 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$, tenemos $f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad x < -3 \\ -1 & \text{si} \quad -3 < x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = -3 si $\lim_{x\to -3^-} f'(x) = \lim_{x\to -3^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to -3^-} f'(x) = \lim_{x\to -3^-} (4x) = 4(-3) = -12$; $\lim_{x\to -3^+} f'(x) = \lim_{x\to -3^+} (-1) = -1$. Como los resultados no son iguales, **f(x) no es derivable en x = -3.**

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (-1) = -1$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} (1) = 1$. Como los resultados no son iguales, **f(x) no es derivable en x = 2.**

Recapitulando **f es derivable en R – {-3,2}.**

b)
Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada $f'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si} \quad x < -3 \\ -1 & \text{si} \quad -3 < x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$.

Si x < -3, f'(x) = 4x.
De f'(x) = 0, tenemos 4x = 0, de donde x = 0, que no está en el dominio x < -3.
Como f'(-4) = 4(-4) = -16 < 0, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-\infty,-3)$

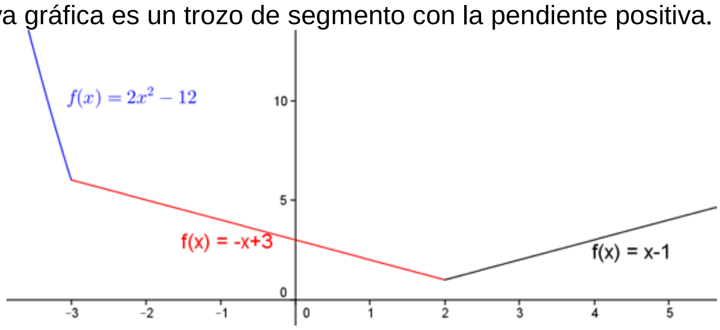
Si -3 < x < 2, f'(x) = -1 < 0, luego f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (-3,2).

Si x > 2, f'(x) = 1 > 0, luego f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (2,+∞).

c)
Calcule los extremos relativos.

Observando el apartado (b) vemos que en x = 2 hay un mínimo relativo que vale f(2) = -(2) + 3 = 1

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de f es:
En x < -3, la gráfica de $2x^2 – 12$ es un trozo de parábola con las ramas hacia arriba (∪), pues el nº que multiplica a x^2 es positivo, y vértice en V(0,-12), que **no está en ese dominio**.
En -3 < x < 2, f(x) = -x + 3, cuya gráfica es un trozo de segmento con la pendiente negativa.
En x > 2, f(x) = x - 3, cuya gráfica es un trozo de segmento con la pendiente positiva.



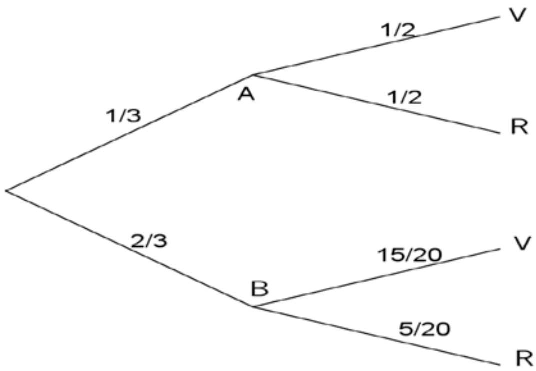
EJERCICIO 3 (A)
En una urna A hay 10 bolas verdes y 10 rojas, y en otra urna B hay 15 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado, de forma que si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en el resto de casos se extrae una bola de la urna B.
a) (1'5 puntos) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.
b) (1 punto) Si la bola extraída resulta ser de color verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Solución

En una urna A hay 10 bolas verdes y 10 rojas, y en otra urna B hay 15 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado, de forma que si sale múltiplo de 3 se extrae una bola de la urna A y en el resto de casos se extrae una bola de la urna B.

Llamemos A, B, V y R = , a los sucesos siguientes, "sacar una bola de la urna A", " sacar una bola de la urna B", " sacar una bola verde " y " sacar una roja ", respectivamente.
Múltiplos de 3 = {3,6}
Datos del problema p(A) = 2/6 = 1/3; p(B) = 4/6 = 2/3; p(V/A) = p(R/A) = 1/2; p(V/B) = 15/20 y p(R/B) = 5/20.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída sea roja (R) es:

p(R) = p(A).p(R/A) + p(B).p(R/B) = (1/3)·(1/2) + (2/3)·(5/20) = (3/5) = **1/3**.

b)
Si la bola extraída resulta ser de color verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/V) =} \frac{p(B \cap V)}{p(V)} = \frac{p(B).p(V/B)}{1 - p(R)} = \frac{(2/3)\cdot(15/20)}{1 - 1/3} \mathbf{= (15/20) = 0'75}.$$

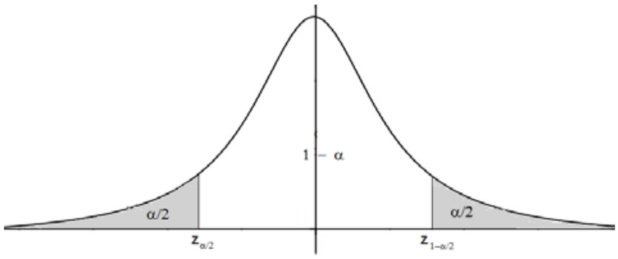
EJERCICIO 4 (A)

El peso de los sobres de café que fabrica una empresa sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0'3 g. Se quiere construir un intervalo de confianza para estimar dicha media, con un nivel de confianza del 98%, y para ello se toma una muestra de 9 sobres.
a) (1 punto) ¿Qué amplitud tendrá dicho intervalo?
b) (0'5 puntos) ¿Cómo afectaría a dicha amplitud un aumento del tamaño de la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza?
c) (1 punto) Obtenga el intervalo de confianza sabiendo que los pesos, en gramos, de los sobres de la muestra son: 7 7'1 7 6'93 7'02 7 7'01 6'5 7'1.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = b - a$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

Sabemos que la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot E = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es* $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, *para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es* $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

El peso de los sobres de café que fabrica una empresa sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0'3 g. Se quiere construir un intervalo de confianza para estimar dicha media, con un nivel de confianza del 98%, y para ello se toma una muestra de 9 sobres.

a)
¿Qué amplitud tendrá dicho intervalo?

Datos del problema: σ = 0'3; n = 9; nivel de confianza = 98% = 0'98 = 1 - α, de donde α = 0'02, con la cual $\alpha/2$ = 0'01.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'99 vemos que no viene, sino que viene 0'9901, que corresponden a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33.

Luego **la amplitud del intervalo es b – a =** $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = 2·(2'33)·(0'3)/√(9) = 4'66·(0'1) **= 0'466.**

b)
¿Cómo afectaría a dicha amplitud un aumento del tamaño de la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza?

Observamos que la amplitud del intervalo es $2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, y también sabemos que al dividir por una cantidad mayor disminuye el cociente. Como el tamaño de la muestra, n, está en el denominador, **si aumentamos n**, disminuye el cociente y por tanto **la amplitud del intervalo es menor**, al contrario **si disminuimos n**, aumenta el cociente y por tanto **la amplitud del intervalo es mayor.**

c)

Obtenga el intervalo de confianza sabiendo que los pesos, en gramos, de los sobres de la muestra son:

7 7'1 7 6'93 7'02 7 7'01 6'5 7'1.

Datos del problema: σ = 0'3; n = 9; $z_{1-\alpha/2}$ = 2'33; $\overline{x}$ = (7+7'1+7+6'93+7'02+7+7'01+6'5+7'1)/9 ≅ 6'9622222.

El intervalo de confianza pedido es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(6'962222-2'33\cdot\frac{0'3}{\sqrt{9}},6'962222+2'33\cdot\frac{0'3}{\sqrt{9}}\right) \cong$

≅ **(6'729222,7'195222)**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (B)

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

5x - 4y ≤ 20; x + 8y ≤ 48; x ≥ 2; y ≥ 0.

a) (1'5 puntos) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) (0'5 puntos) Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función F(x,y) = 2x + 12y en este recinto e indique dónde se alcanzan.

c) (0'5 puntos) Razone si existen valores (x,y) pertenecientes al recinto para los que F(x,y) = 100.

Solución

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

5x - 4y ≤ 20; x + 8y ≤ 48; x ≥ 2; y ≥ 0.

a)

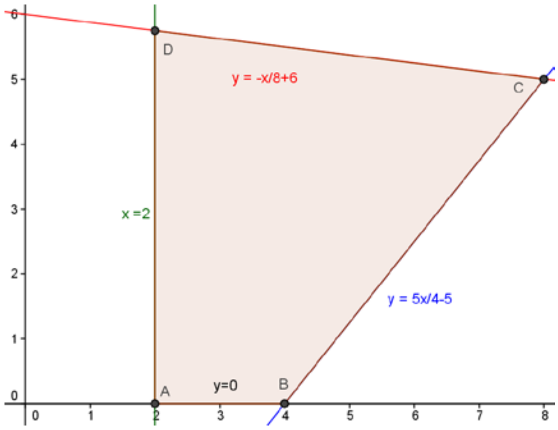
Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

Las desigualdades 5x - 4y ≤ 20; x + 8y ≤ 48; x ≥ 2; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, 5x - 4y = 20; x + 8y = 48; x = 2; y = 0

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

y = 5x/4 - 5; y = -x/8 + 6; x = 2; y = 0

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 2 e y = 0, tenemos vértice A(2,0).

De y = 0 e y = 5x/4 – 5, tenemos 0 = 5x/4 – 5 → 5x/4 = 5 → x = 4, y el vértice es B(4,0).

De y = 5x/4 – 5 e y = -x/8 + 6, tenemos 5x/4 – 5 = -x/8 + 6 → 10x – 40 = -x + 48 → 11x = 88 → x = 8, de donde y = 5, y el vértice es C(8,5).

De y = -x/8 + 6 y x = 2, tenemos y = -1/4 + 6 = 5'75, y el vértice es D(2,5'75).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto son: A(2,0), B(4,0), C(8,5) y D(2,5'75).

b)

Halle los valores máximo y mínimo que alcanza la función F(x,y) = 2x + 12y en este recinto e indique dónde se alcanzan.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(2,0), B(4,0), C(8,5) y D(2,5'75). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(2,0) = 2(2) + 12(0) **= 4**; F(4,0) = 2(4) + 12(0) = 8;
F(8,5) = 2(8) + 12(5) **= 76**; F(5,5/3) = 2(2) + 12(5'75) = 73

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 76** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(8,5) y el mínimo absoluto de la función F en la región es 4** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(2,0).**
c)
Razone si existen valores (x,y) pertenecientes al recinto para los que F(x,y) = 100.

Cómo el mínimo absoluto de la función F vale 4 y el máximo absoluto de la función F vale 76, **el valor 100 no se alcanza en el recinto R, porque es superior al valor máximo de F que es 76.**

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$.
a) (1'25 puntos) Halle los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.
b) (0'75 puntos) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = - 2.
c) (0'5 puntos) En el punto de abscisa x = 1, ¿la función es creciente o decreciente?

Solución

Sea la función $f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$.
a)
Halle los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión.

Nos están pidiendo el estudio de la segunda derivada.
Como $f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$ es una función polinómica, sabemos que es continua y derivable en R las veces que necesitemos.
Calculamos f''(x) y resolvemos la ecuación f''(x) = 0.
$f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$; $f'(x) = 3x^2 - 48x + 4$; $f''(x) = 6x - 48$.

De $f''(x) = 0 \rightarrow 6x - 48 = 0$, luego x = 8, que será el posible punto de inflexión.

Como $f''(0) = -48 < 0$, **f(x) es cóncava ($\cap$) en el intervalo ($-\infty$,8).**
Como $f''(10) = 12 > 0$, **f(x) es convexa ($\cup$) en el intervalo (8,$+\infty$).**

Por definición **x = 8 es un punto de inflexión y vale f(8)** $= (8)^3 - 24(8)^2 + 4(8)$ **= -992.**
b)
Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = - 2.

La recta tangente a la gráfica de f en x = -2 es $y - f(-2) = f'(-2)(x - (- 2))$.
$f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$, luego $f(-2) = (-2)^3 - 24(-2)^2 + 4(-2) = - 112$.
$f(x) = 3x^2 - 48x + 4$, luego $f'(2) = 3(-2)^2 - 48(-2) + 4 = 112$.
La recta tangente pedida es **y + 112 = 112·(x + 112).**
c)
En el punto de abscisa x = 1, ¿la función es creciente o decreciente?

Estudiamos un poco la monotonía de f, es decir hacemos el estudio de la primera derivada f'(x).
Calculamos f'(x) y resolvemos la ecuación f'(x) = 0.
$f(x) = x^3 - 24x^2 + 4x$; $f'(x) = 3x^2 - 48x + 4$.

De $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 48x + 4 = 0$. Resolviendo la ecuación sale $x_1 = \frac{48 - \sqrt{48^2 - 4(3)(4)}}{6} = 8 - \frac{\sqrt{141}}{3}$ y $x_2 = \frac{48 + \sqrt{48^2 - 4(3)(4)}}{6} = 8 + \frac{\sqrt{141}}{3}$, que serán los posibles extremos.

Como $f'(1) = 3(1)^2 - 48(1) + 4 = -41 < 0$, **f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en el intervalo ($8 - \frac{\sqrt{141}}{3}$, $8 + \frac{\sqrt{141}}{3}$)**, en particular es estrictamente decreciente en x = 1.

(Lo podíamos hacer realizado viendo solamente el signo de f'(1) = -41 < 0, luego es $(\searrow)$ e x = 1).

EJERCICIO 3 (B)

En una empresa, el 65% de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:
a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?
b) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?
c) (0'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

Solución

En una empresa, el 65% de sus empleados habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán. De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán. Se escoge un empleado al azar:
a)
¿Cuál es la probabilidad de que hable ambos idiomas?

Llamamos A y B a los sucesos "empleado habla inglés" y "empleado habla inglés".
Del problema tenemos:
El 65% de sus empleados habla inglés p(A) = 65% = 0'65,
Habla inglés, y de éstos, el 40% habla también alemán p(B/A) = 40% = 0'4.
De los que no hablan inglés, el 25% habla alemán $p(B/A^C)$ = 25% = 0'25.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;
$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden p(hable ambos idiomas) = p(A y B) = $p(A\cap B)$

De p(B/A) = 0'4 = $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$, tenemos $\mathbf{p(A\cap B)}$ = 0'4·p(A) = 0'4·0'65 **= 0'26.**

b)
¿Cuál es la probabilidad de que hable alemán?

Me piden p(hable alemán) = p(B)

De $p(B/A^C)$ = 0'25 = $\dfrac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \dfrac{p(B) - p(B\cap A)}{1 - p(A)}$, tenemos $p(B) - p(A\cap B)$ = 0'25·(1 - p(A)), es decir:

p(B) = $p(A\cap B)$ + 0'25·(1 - p(A)) = 0'26 + 0'25·(1 – 0'65) **= 0'3475**.

c)
¿Cuál es la probabilidad de que, sabiendo que habla alemán, hable también inglés?

Me piden p(hable inglés, sabiendo que habla alemán) = p(A/B)

p(A/B) = $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ = 0'26/0'3475 ≅ **0'7482.**

EJERCICIO 4 (B)

(2'5 puntos) Los representantes de un partido político creen que la proporción de sus votantes será al menos del 35%. Para confirmarlo eligen una muestra al azar de 1200 votantes y obtienen que 336 de ellos son partidarios de votarles. Mediante un contraste de hipótesis, con H_0 : p ≥ 0'35, y a un nivel de significación del 0'01, ¿se puede admitir como cierta la creencia de los representantes del partido político?

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N(\hat{p}, \sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Nos dice el problema que la proporción de sus votantes será al menos del 35%, por tanto la hipótesis nula es $H_0 : p_0 \geq 0'35$ (lo dá el problema), con un nivel de significación de α = 0,01. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: p_0 = 0’35; n = 1200; $\hat{p}$ = 336/1200 = 0’28; región crítica = α = 0,01 = 1.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

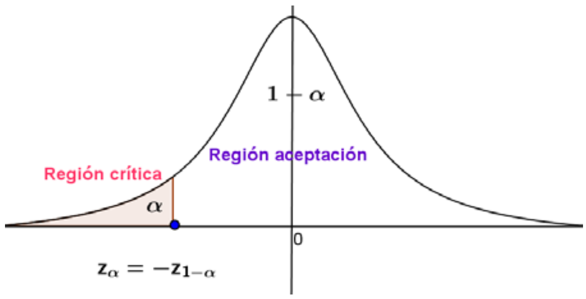
Las hipótesis nula y alternativa son: H_0 : $p_0 \geq$ 0’35 (al menos el 35% votan) y H_1 : p_0 < 0’35, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0’01, luego tenemos 1 - α = 0’99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0’01 = 0’99, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0’9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 2’33 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \dfrac{0'28 - 0'35}{\sqrt{\dfrac{0'35 \cdot 0'65}{1200}}} \cong$ -5’084.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -5’084 está en la región de rechazo para el punto crítico $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 2’33, pues -5’084 < -2’33, **rechazamos la hipótesis nula H_0: H_0: $p_0 \geq$ 0’35, y aceptamos la hipótesis alternativa H_1 : p_0 < 0’35, con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 1%, afirmamos que menos del 35% votarán a dicho partido político.**