SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SEPTIEMBRE 2013 MODELO 4 RESERVA 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^3.
b) (1'5 puntos) Determine la matriz X para que A·X + B·C = D.

Solución

Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule A^3.

$$A^3 = A\cdot A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 21 & 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}$$

b)
Determine la matriz X para que A·X + B·C = D.

Si la matriz A tiene matriz inversa A^{-1}, (podemos pasar de $(A|I_2)$ mediante transformaciones elementales a la matriz $(I_2|\,A^{-1})$), podemos multiplicar la expresión matricial A·X + B·C = D por la izquierda por la matriz A^{-1}.

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2 - F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)_{\text{Cambio } F_1 \text{ por } F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)_{F_2 - 2\cdot F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)^{F_1 + 2\cdot F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)_{(-1)F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1}), \text{ por tanto } A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

También la podíamos ver por la fórmula $A^{-1} = 1/(|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1 \neq 0$, luego existe A^{-1}; $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

De A·X + B·C = D, tenemos A·X = D – B·C, luego $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot(D - B\cdot C)$ $\rightarrow$ $I_2\cdot X = A^{-1}\cdot(D - B\cdot C)$ $\rightarrow$
$\rightarrow$ $X = A^{-1}\cdot(D - B\cdot C)$

$$\text{Luego } \mathbf{X} = A^{-1}\cdot(D - B\cdot C) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2 (A)

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) (0'75 puntos) $f(x) = \dfrac{\left(x^2 - 5\right)^3}{3 - x^2}$

b) (0'75 puntos) $g(x) = e^{7x}\cdot(x - 5x^2)^2$.

c) (1 punto) $h(x) = \dfrac{x.\ln(1 - x^2)}{x - 3}$

Solución

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\left(x^2 - 5\right)^3}{3 - x^2}$; b) $g(x) = e^{7x}\cdot(x - 5x^2)^2$; c) $h(x) = \dfrac{x.\ln(1 - x^2)}{x - 3}$

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También algo sobre extremos absolutos

$(\,f(x)+g(x)\,)' = f'(x)+g'(x)$; $(\,f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$;

$((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$; $(a^x)' = a^x.\ln(a)$; $(e^{kx})' = k.e^{kx}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$; $(k)' = 0$.

a)

$$f(x) = \frac{\left(x^2 - 5\right)^3}{3 - x^2};$$

$$f'(x) = \frac{3\cdot\left(x^2-5\right)^2\cdot 2x\cdot(3 - x^2) - \left(x^2-5\right)^3\cdot(-2x)}{(3 - x^2)^2} = \frac{(2x)\cdot\left(x^2-5\right)^2\left[3\cdot(3 - x^2) + \left(x^2-5\right)\right]}{(3 - x^2)^2} = \frac{(2x)\cdot\left(x^2-5\right)^2\cdot(-2x^2+4)}{(3 - x^2)^2}$$

b)

$g(x) = e^{7x}\cdot(x - 5x^2)^2$;

$g'(x) = e^{7x}\cdot(7)\cdot(x - 5x^2)^2 + e^{7x}\cdot 2\cdot(x - 5x^2)\cdot(1 - 10x) = e^{7x}\cdot(7)\cdot(x - 5x^2)^2\cdot[7\cdot(x - 5x^2) + 2\cdot(1 - 10x)] =$

$= 7\cdot e^{7x}\cdot(x - 5x^2)^2\cdot[-35x^2 - 13x + 2]$

c)

$$h(x) = \frac{x.\ln(1 - x^2)}{x - 3}$$

$$h'(x) = \frac{[1\cdot\ln(1 - x^2) + x\cdot\frac{-2x}{1 - x^2}].(x - 3) - x\cdot\ln(1 - x^2)\cdot 1}{(x - 3)^2} = \frac{[(1- x^2)\cdot\ln(1 - x^2) - 2x^2].(x - 3) - (1 - x^2)\cdot x\cdot\ln(1 - x^2)}{(1 - x^2)\cdot(x - 3)^2}$$

EJERCICIO 3 (A)

Un Centro de Salud propone dos terapias, A y B, para dejar de fumar. De las personas que acuden al Centro para dejar de fumar, el 45% elige la terapia A, y el resto la B. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia A y el 80% de los que siguieron la B no han vuelto a fumar.

Se elige al azar un usuario del Centro que siguió una de las dos terapias:

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que después de un año no haya vuelto a fumar.

b) (0'75 puntos) Si transcurrido un año esa persona sigue sin fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

c) (0'75 puntos) Si transcurrido un año esa persona ha vuelto a fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

Solución

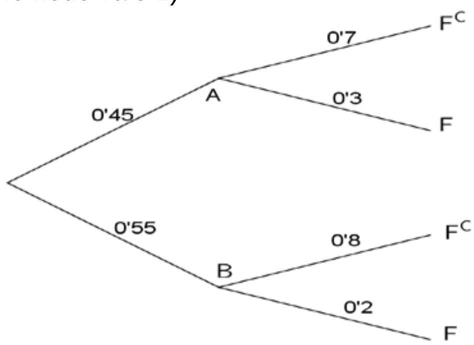
Un Centro de Salud propone dos terapias, A y B, para dejar de fumar. De las personas que acuden al Centro para dejar de fumar, el 45% elige la terapia A, y el resto la B. Después de un año el 70% de los que siguieron la terapia A y el 80% de los que siguieron la B no han vuelto a fumar.

Se elige al azar un usuario del Centro que siguió una de las dos terapias:

Llamemos A, B, F y F^C, a los sucesos siguientes, "seguir la terapia A", "seguir la terapia B", "seguir fumando" y "dejar de fumar ", respectivamente.

Datos del problema $p(A) = 45\% = 0'45$; $p(F^C/A) = 70\% = 0'7$; $p(F^C/B) = 80\% = 0'8$.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

Calcule la probabilidad de que después de un año no haya vuelto a fumar.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que no haya vuelto a fumar es:

$$\mathbf{p(F^C) =} p(A).p(F^C/A) + p(B).p(F^C/B) = (0'45)\cdot(0'7) + (0'55)\cdot(0'8) = (3/5) = \mathbf{0'755}.$$

b)

Si transcurrido un año esa persona sigue sin fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia

A.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/F^C) =} \frac{p\left(A \cap F^C\right)}{p(F^C)} = \frac{p\left(A\right).p(F^C/A)}{p(F^C)} = (0'45)\cdot(0'7):(0'755) \cong \mathbf{0'41722}.$$

c)
Si transcurrido un año esa persona ha vuelto a fumar, calcule la probabilidad de que hubiera seguido la terapia A.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/F) =} \frac{p\left(A \cap F\right)}{p(F)} = \frac{p\left(A\right).p(F/A)}{1 - p(F^C)} = (0'45)\cdot(0'3):(1 - 0'755) \cong \mathbf{0'55102}.$$

EJERCICIO 4 (A)

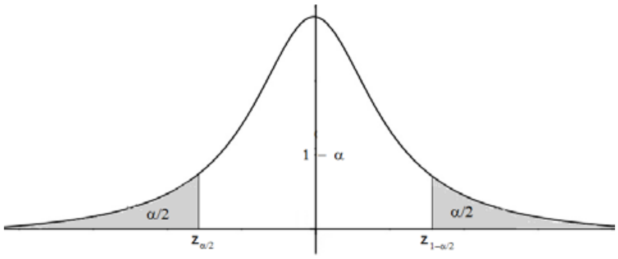
Se conoce que la acidez de una solución es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 0'2. Se ha tomado una muestra aleatoria de cinco soluciones y se han obtenido las siguientes medidas de la acidez:

7'92 7'95 7'91 7'9 7'94.

a) (1'25 puntos) Halle el intervalo de confianza, al 99%, para la media poblacional.
b) (0'5 puntos) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior?
c) (0'75 puntos) Para el mismo nivel de confianza, calcule el tamaño mínimo muestral que permita reducir el error anterior a la mitad.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu , \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = b - a$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

Sabemos que la amplitud del intervalo es b – a = 2·E = 2· $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Se conoce que la acidez de una solución es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 0'2. Se ha tomado una muestra aleatoria de cinco soluciones y se han obtenido las siguientes medidas de la acidez:

7'92 7'95 7'91 7'9 7'94.

a)
Halle el intervalo de confianza, al 99%, para la media poblacional.

Datos del problema: σ = 0'2; n = 5; $\overline{x}$ = (7'92+7'95+7'91+7'9+7'94)/5 = 7'924; nivel de confianza = 99% = = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, con la cual α/2 = 0'005.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'005 = 0'995, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'995 vemos que no viene. Una de las más próximas es 0'9951, que corresponden a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'58.

El intervalo de confianza pedido es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(7'924 - 2'58\cdot\frac{0'2}{\sqrt{5}}, 7'924 + 2'58\cdot\frac{0'2}{\sqrt{5}}\right)$ ≅ **(7'69324,8'15476)**

b)
¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior?

Sabemos que el **error máximo** de la estimación es **E =** $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ = (2'58)·(0'2)·(√5) ≅ **0'23076.**

c)
Para el mismo nivel de confianza, calcule el tamaño mínimo muestral que permita reducir el error anterior a la mitad.

Sabemos que el **tamaño mínimo** de la muestra es **n ≥** $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'58\cdot 0'2}{0'23076}\right)^2$ ≅ **5'000096, por tanto el tamaño mínimo es n = 6.**

OPCIÓN B

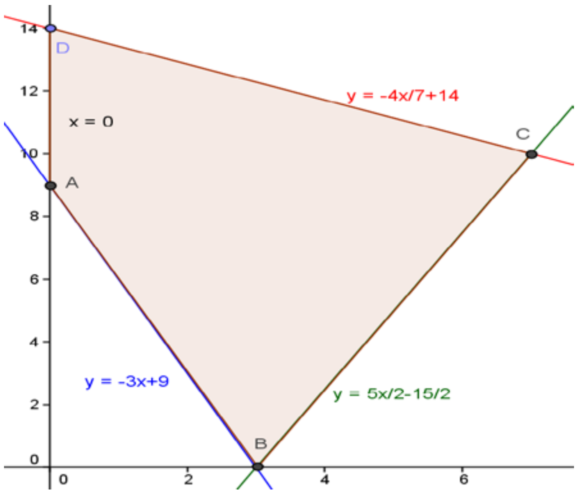
EJERCICIO 1 (B)
Se desea maximizar la función F(x,y) = 14x + 8y en el recinto dado por:
y +3x ≥ 9; y ≤ -4x/7 + 14; 5x - 2y ≤ 15; x ≥ 0.
a) (1 punto) Represente la región factible del problema.
b) (1 punto) ¿Cuál es el valor máximo de F y la solución óptima del problema?
c) (0'5 puntos) Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.

Solución

Se desea maximizar la función F(x,y) = 14x + 8y en el recinto dado por:
y +3x ≥ 9; y ≤ -4x/7 + 14; 5x - 2y ≤ 15; x ≥ 0.

a)
Represente la región factible del problema.

Las desigualdades y + 3x ≥ 9; y ≤ -4x/7 + 14; 5x - 2y ≤ 15; x ≥ 0, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, y + 3x = 9; y = -4x/7 + 14; 5x - 2y = 15; x = 0.
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = -3x + 9; y = -4x/7 + 14; y = 5x/2 - 15/2; x = 0.
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De x = 0 e y = -3x + 9, tenemos y = 9 y el vértice A(0,9).
De y = -3x+9 e y = 5x/2 – 15/2, tenemos -3x+9 = 5x/2 - 15/2 → -6x+18 = 5x - 15, → 33 = 11x, de donde x=3 e y = 0, y el vértice es B(3,0).
De y = 5x/2 – 15/2 e y = -4x/7 + 14, tenemos 5x/2 – 15/2 = -4x/7 + 14 → 35x – 105 = -8x + 196 →

$\rightarrow$ 43x = 301 $\rightarrow$ x = 7, de donde y = 10, y el vértice es C(7,10).
De y = -4x/7 + 14 y x = 0, tenemos y = 14, y el vértice es D(0,14).

Vemos que la región factible es el polígono convexo limitado por los vértices del recinto son: A(0,9), B(3,0), C(7,10) y D(0,14).

b)
¿Cuál es el valor máximo de F(x,y) = 14x + 8y, y la solución óptima del problema?

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,9), B(3,0), C(7,10) y D(0,14). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,9) = 14(0) + 8(9) = 72; F(3,0) = 14(3) + 8(0) = 42;
F(7,10) = 14(7) + 8(10) = **178**; F(0,14) = 14(0) + 8(14) = 112

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 178** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(7,10).**

c)
Obtenga un punto de la región factible que no sea el óptimo.

Un punto de la región factible que no sea el óptimo podría ser el vértice B(3,0), pues en él la función F vale 42.

EJERCICIO 2 (B)

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a) (0'75 puntos) Determine el dominio y estudie la continuidad de la función.
b) (1 punto) Obtenga los extremos de la función.
c) (0'75 puntos) Estudie su curvatura.

Solución

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a)
Determine el dominio y estudie la continuidad de la función.

El **dominio de la función f es todo R**, nos lo indica el problema,

$x^3 - 1$ es una función continua y derivable en R, en particular en x < 1.
$-x^2 + 4x - 3$ es una función continua y derivable en R, en particular en x ≥ 1.
Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua.

Veamos la continuidad de f en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^3 - 12) = (1)^3 - 1 = 0$;

$f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2 + 4x - 3) = -(1)^2 + 4(1) - 3 = 0$, por tanto f(x) es continua en x = 0.

Recapitulando **f es continua en R**.

b)
Obtenga los extremos de la función.

Sabemos que la monotonía es el estudio de la primera derivada $f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Si x < 1, $f'(x) = 3x^2$.
De f'(x) = 0, tenemos $3x^2 = 0$, de donde x = 0 (doble). Posible extremo.
Como $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3 > 0$, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,0)$
Como $f'(0'5) = 3(0'5)^2 = 0'75 > 0$, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0,1)

En x = 0, la función es estrictamente creciente, luego no es un extremo.
Si x > 1, f'(x) = -2x + 4
De f'(x) = 0, tenemos -2x + 4 = 0, de donde x = 2. Posible extremo.
Como f'(1'1) = -2(1'1) + 4 = 1'8 > 0, f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (1,2)
Como f'(3) = -2(3) + 4 = -2 < 0, f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (2,+∞)

Por definición **x = 2 es un máximo relativo y vale f(2) =** $-(2)^2 + 4(2) - 3$ **= 1**.
c)
Estudie su curvatura.

Nos están pidiendo los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión; es decir el estudio de la segunda derivada.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Si x < 1, f''(x) = 6x.
De f''(x) = 0, tenemos 6x = 0, de donde x = 0. Posible punto de inflexión.
Como f''(-1) = 6(-1) = - 6 < 0, **f(x) es cóncava (∩) en el intervalo (-∞,0).**
Como f'(0'5) = 6(0'5) = 3 > 0, **f(x) es convexa (∪) en el intervalo (0,1)**
Por definición **x = 0 es un punto de inflexión y vale f(0)** = $(0)^3 - 1$ **= -1.**

Si x > 1, f''(x) = -2 < 0, luego **f(x) es cóncava (∩) en el intervalo (1,+∞).**
Por definición **x = 1 es un punto de inflexión y vale f(1)** = $-(1)^2 + 4(1) - 3$ **= 0.**

EJERCICIO 3 (B)

De los sucesos independientes A y B se sabe que $p(A^C) = 0'4$ y $p(A\cup B) = 0'8$.
a) (1'25 puntos) Halle la probabilidad de B.
b) (0'75 puntos) Halle la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.
c) (0'5 puntos) ¿Son incompatibles los sucesos A y B?

Solución

De los sucesos independientes A y B se sabe que $p(A^C) = 0'4$ y $p(A\cup B) = 0'8$.
a)
Halle la probabilidad de B.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden p(B)

De $p(A^C) = 0'4 \rightarrow 1 - p(A) = 0'4$, de donde p(A) = 0'6.
De $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = p(A) + p(B) - p(A)\cdot p(B)$, tenemos $0'8 = 0'6 + p(B) - 0'6\cdot p(B)$, luego $0'2 = 0'4\cdot p(b)$, por tanto **p(B)** = 0'2/0'4 **= 0'5**.

b)
Halle la probabilidad de que no se verifique B si se ha verificado A.

Me piden $p(B^C/A) = \dfrac{p(B^c\cap A)}{p(A)}$

De A y B independientes tenemos $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B) = 0'6\cdot 0'5 = 0'3$.

Luego $\mathbf{p(B^C/A)} = \dfrac{p(B^c\cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(A) - p(A\cap B)}{p(A)}$ = (0'6 – 0'3)/(0'6) = 0'3/0'6 **= 0'5.**

c)
¿Son incompatibles los sucesos A y B?

A y B son incompatibles si $A\cap B = \phi$, es decir $p(A\cap B) = 0$, pero hemos visto que $p(A\cap B) = 0'3$, luego **los suceso A y B son compatibles.**

EJERCICIO 4 (B)

a) (1'25 puntos) Se considera la población {2,4,6}. Escriba todas las posibles muestras de tamaño dos

elegidas mediante muestreo aleatorio simple y determine la desviación típica de las medias muestrales.
b) (1'25 puntos) En una ciudad se seleccionó una muestra aleatoria de 500 alumnos de Bachillerato a los que se les preguntó si poseían una determinada marca de teléfono móvil, resultando que 80 de ellos contestaron afirmativamente. Obtenga un intervalo de confianza, al 92%, para estimar la proporción de estudiantes de Bachillerato que poseen esa marca de teléfono móvil.

Solución

a)
Se considera la población {2,4,6}. Escriba todas las posibles muestras de tamaño dos elegidas mediante muestreo aleatorio simple y determine la desviación típica de las medias muestrales.

Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay 9 muestra con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

MUESTRAS									
Elementos	2 2	2 4	2 6	4 2	4 4	4 6	6 2	6 4	6 6
Media de la muestra $\overline{x}_i$	2	3	4	3	4	5	4	5	6

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	2	10	50
6	1	6	36
$\sum$	**N =9**	**36**	**156**

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es:

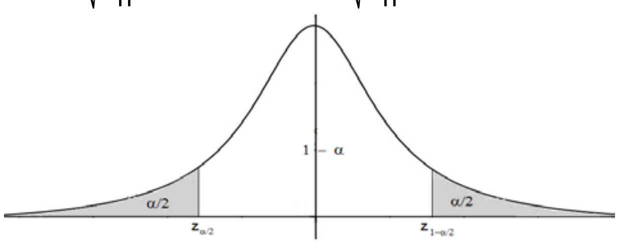
$$\mu = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{36}{9} = \mathbf{4.}$$

La desviación típica de la distribución muestral de medias es:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{156}{9} - (4)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cong \mathbf{1'547.}$$

b)
En una ciudad se seleccionó una muestra aleatoria de 500 alumnos de Bachillerato a los que se les preguntó si poseían una determinada marca de teléfono móvil, resultando que 80 de ellos contestaron afirmativamente. Obtenga un intervalo de confianza, al 92%, para estimar la proporción de estudiantes de Bachillerato que poseen esa marca de teléfono móvil.

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\mathbf{p} \to N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$*.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b-a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.
Trabajamos con la normal N(0,1) tipificada de la normal muestral.
El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ = (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En una ciudad se seleccionó una muestra aleatoria de 500 alumnos de Bachillerato a los que se les preguntó si poseían una determinada marca de teléfono móvil, resultando que 80 de ellos contestaron afirmativamente. Obtenga un intervalo de confianza, al 92%, para estimar la proporción de estudiantes de Bachillerato que poseen esa marca de teléfono móvil.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 80/500 = 0’16, $\hat{q}$ = 1 - 0’16 = 0’84, n = 500, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 92% =
= 0’92, de donde α = 0’08 = 8% como *nivel de significación*.
De α = 0’08 tenemos $\alpha/2$ = 0’04

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ = 1 - 0’04 = 0’96, probabilidad que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’96 no viene en la tabla y uno de los valores más próximos es 0’9599, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ =
= 1’75. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'16 - 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'16\cdot 0'84}{500}}, 0'16 + 1'75\cdot\sqrt{\frac{0'16\cdot 0'84}{500}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0’131308; 0’181869)**