SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2013 MODELO (COMÚN)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (1'25 puntos) Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

b) (1'25 puntos) Para los valores a = 3 y b = 1 calcule la matriz X talque $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

a)

Obtenga a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a+4 & -b-2 \\ ab+2a & -a+b^2 \end{pmatrix}$. Igualando tenemos:

5 = -a + 4, de donde **a = -1**.
-2 = -b - 2, de donde **b = 0**.
-2 = ab + 2a, lo cual es cierto para a = -1 y b = 0.
1 = -a + b^2, lo cual es cierto para a = -1 y b = 0.

Para a = -1 y b = 0, tenemos $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ la cual **es simétrica** pues $A = A^t$, y además se observa que los elementos "simétricos" respecto a la diagonal principal son iguales (el -1).

b)

Para los valores a = 3 y b = 1 calcule la matriz X talque $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

Para a = 3 y b = 1 tenemos $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

De $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$, tenemos $A \cdot B = 2X - 6I_2$ es decir $(1/2) \cdot A \cdot B + 3I_2 = X$.

La matriz pedida es **X =** $(1/2) \cdot A \cdot B + 3I_2 = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1/2) \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -5/2 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 9/2 \end{pmatrix} = \mathbf{(1/2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2 (A)

Los beneficios de una empresa en sus 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$, $0 \le t \le 8$; donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a) (1'5 puntos) Estudia la monotonía y los extremos de B(t).

b) (1 punto) Dibuje la gráfica de B(t) en el intervalo [0,8] y explique, a partir de ella la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.

Solución

Los beneficios de una empresa en sus 8 años vienen dados, en millones de euros, por la función

$B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$, $0 \le t \le 8$; donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde su fundación.

a)

Estudia la monotonía y los extremos de B(t).

La monotonía es el estudio de la 1ª derivada, como B(t) es una cúbica sabemos que es continua y derivable en todo R, es particular en su dominio $0 \le t \le 8$. Por tanto los extremos absolutos se encontrarán entre los valores que anulen la 1ª derivada B'(t), y los extremos del intervalo t = 0 y t = 8.

De $B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$, tenemos $B'(t) = \frac{3t^2}{4} - 6t + 9$.

De $B'(t) = 0 \rightarrow \frac{3t^2}{4} - 6t + 9 = 0 \rightarrow 3t^2 - 24t + 36 = 0 \rightarrow t^2 - 8t + 12 = 0 \rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$,
de donde $t = 6$ y $t = 2$.

Como $B'(1) = \frac{3(1)^2}{4} - 6(1) + 9 = 15/4 > 0$, B(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0,2).

Como $B'(3) = \frac{3(3)^2}{4} - 6(3) + 9 = - 9/4 < 0$, B(t) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (2,6).

Como $B'(7) = \frac{3(7)^2}{4} - 6(7) + 9 = 15/4 > 0$, B(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (6,8).

Por definición $t = 2$ es un **máximo relativo** de B(t) que vale $B(2) = \frac{2^3}{4} - 3(2)^2 + 9(2) = 8$.

Por definición $t = 6$ es un **mínimo relativo** de B(t) que vale $B(6) = \frac{6^3}{4} - 3(6)^2 + 9(6) = 0$.

Falta evaluar $B(t) = \frac{t^3}{4} - 3t^2 + 9t$ en los valores $t = 0$ y $t = 8$, para ver los extremos absolutos (teniendo en cuenta los resultados ya obtenidos)

$B(0) = \frac{0^3}{4} - 3(0)^2 + 9(0) = 0$

$B(8) = \frac{8^3}{4} - 3(8)^2 + 9(8) = 8$.

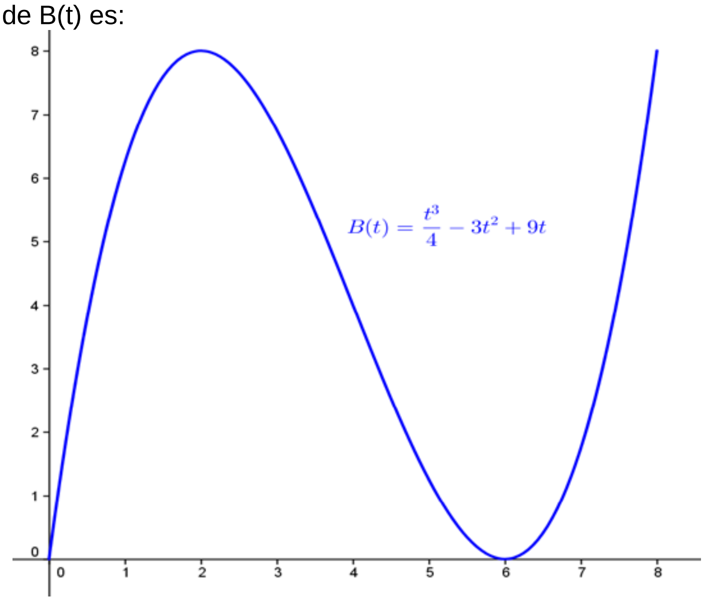
Vemos que el **máximo absoluto** de B(t) **es 8** y **se alcanza en t = 2 y t = 8.**
Vemos que el **mínimo absoluto** de B(t) **es 0** y **se alcanza en t = 0 y t = 6.**

b)
Dibuje la gráfica de B(t) en el intervalo [0,8] y explique, a partir de ella la evolución de los beneficios de esta empresa en sus 8 años de existencia.

La gráfica de la función B(t) es una cúbica. Teniendo en cuenta los resultados del apartado (a) podemos dibujarla en [0,8], y podemos también decir la evolución de sus beneficios sin tener que observar su gráfica.

Tenemos B(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (0,2), B(t) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (2,6), B(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (6,8), B(0) = 0, B(2) = 8, B(6) = 0 y B(8) = 8.

Un esbozo de la gráfica de B(t) es:



Observando la gráfica los beneficios crecen en los años $(0,2)\cup(6,8)$, y decrecen en (2,6).

EJERCICIO 3 (A)

El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.
a) (1'5 puntos) Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.
b) (1 punto) Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando

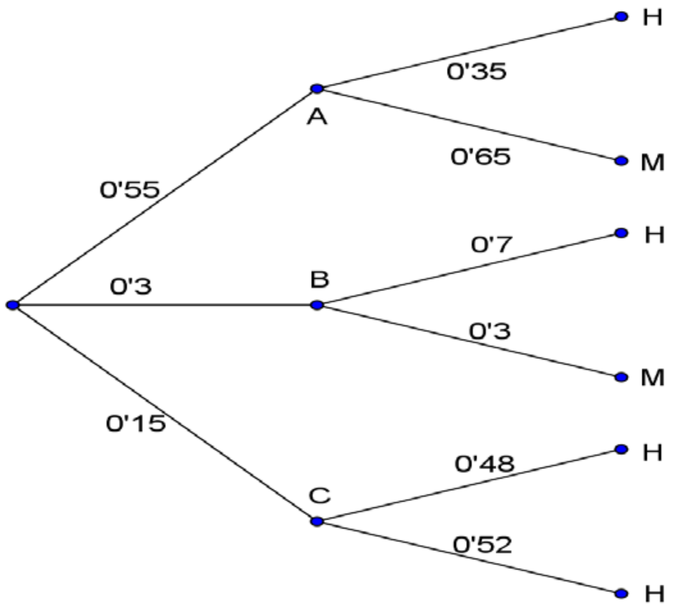
Solución

El 55% de los alumnos de un centro docente utiliza en su desplazamiento transporte público, el 30% usa vehículo propio y el resto va andando. El 65% de los que utilizan transporte público son mujeres, el 70% de los que usan vehículo propio son hombres y el 52% de los que van andando son mujeres.
a)
Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

Llamemos A, B, C, H y M, a los sucesos siguientes, "utiliza transporte público", "utiliza su vehículo", "va andando", "es hombre" y "es mujer", respectivamente.

Además tenemos p(A) = 55% = 0'55, p(B) = 30% = 0'3, p(M/A) = 65% = 0'65, p(H/B) = 70% = 0'7 y p(M/C) = 52% = 0'52

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Elegido al azar un alumno de ese centro, calcule la probabilidad de que sea hombre.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que sea hombre es:

p(H) = p(A).p(H/A) + p(B).p(H/B) + p(C).p(H/C) =
= (0'55)·(0'35) + (0'3)·(0'7) + (0'15)·(0'48) **= 0'4745.**

b)
Elegido al azar un hombre, alumno de ese centro, ¿cuál es la probabilidad de que vaya andando

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(C/H)} = \frac{p(C\cap H)}{p(H)} = \frac{p(C)\cdot p(H/C)}{p(H)} = \frac{(0'15)\cdot(0'48)}{0'4745} = 144/949 \cong \mathbf{0'15174}.$$

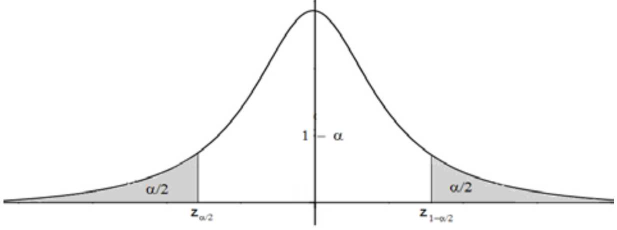
EJERCICIO 4 (A)

Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.
a) (1'5 puntos) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.
b) (1 punto) A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo

de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0’02,¿cuál es el tamaño que debe tener la nueva muestra?

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p,** el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$*, y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$ *o* $\mathbf{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$*.*



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$*.*

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es* $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2}$*.*

Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.

a)

Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 175/500 = 0’35, $\hat{q}$ = 1 - 0’35 = 0’65, n = 500, nivel de confianza $1 - \alpha$ = 94% = = 0’94, de donde α = 0’06 = 6% como *nivel de significación*.

De α = 0’06 tenemos $\alpha/2$ = 0’03

De la igualdad $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'03 = 0'97$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0’97 no viene en la tabla y el valor más próximo es 0’9699, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1’88. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'35 - 1'88\cdot\sqrt{\frac{0'35\cdot0'65}{500}}, 0'35 + 1'88\cdot\sqrt{\frac{0'35\cdot0'65}{500}}\right) \cong$$

$\cong$ **(0’309898; 0’390102)**

b)

A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0’02,¿cuál es el tamaño que debe tener la nueva muestra?

Datos: $z_{1-\alpha/2}$ = 1’88, $\hat{p}$ = 0’35, $\hat{q}$ = 0’65; error máximo = E ≤ 0’02.

De $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'88)^2\cdot0'35\cdot0'65}{0'02^2}$ $\cong$ 2010’19, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra es n = 2011**.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro.

Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 200 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,
a) (2 puntos) ¿Cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?
b) (0'5 puntos) ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

Solución

Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica,
a)
¿Cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?

"x" = Número de tapices tipo A.
"y" = Número de tapices tipo B.
Función Objetivo **F(x,y) = 2000x + 3000y**. (vende el tipo A a 2000€ y el tipo A a 3000€)
Restricciones:

	Tipo A	Tipo B	Cantidad
Hilo de seda	1	2	500
Hilo de plata	2	1	400
Hilo de oro	0	1	225

Mirando la tabla tenemos: $x + 2y \le 500$; $2x + y \le 400$; $y \le 225$
Si se vende todo lo que se fabrica: $x \ge 0$, $y \ge 0$

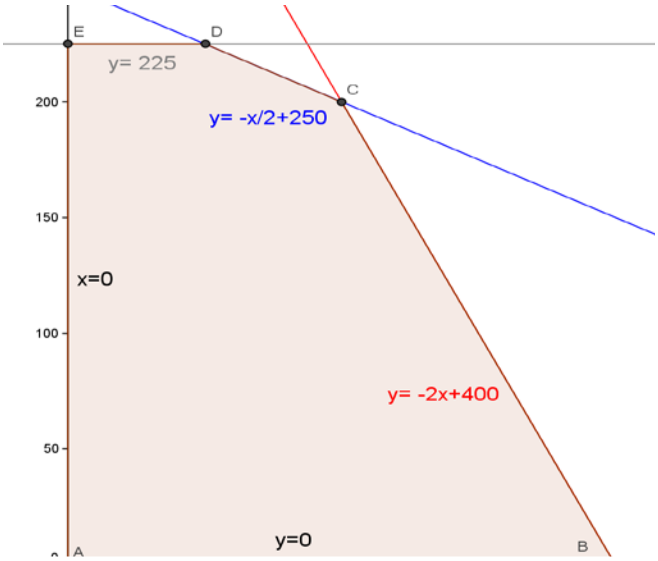
Las desigualdades $x + 2y \le 500$; $2x + y \le 400$; $y \le 225$; $x \ge 0$, $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

$$x + 2y = 500;\ 2x + y = 400;\ y = 225;\ x = 0,\ y = 0,$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -x/2 + 250;\quad y = -2x + 400;\quad y = 225;\ x = 0,\ y = 0$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $x = 0$ e $y = 0$. Punto de corte A(0,0).
De $y = 0$ e $y = -2x+400$, tenemos $0 = -2x+400$, luego $x = 200$. Punto de corte B(200,0).
De $y = -2x + 400$ e $y = -x/2 + 250$, tenemos $-2x + 400 = -x/2 + 250$, de donde "$4x+800 = -x+500$", es decir $300 = 3x$, luego "$x = 100$" e "$y = 200$", y el punto de corte es C(100,200)

De y = 225 e y = -x/2 + 250, tenemos 225 = -x/2 + 250, de donde “450 = -x+500”, es decir x = 50, luego “x = 50” e “y = 225”, y el punto de corte es D(50,225)
De x = 0 e y = 225. Punto de corte es E(0,225)

Vemos que los vértices del recinto son: A(0,0), B(200,0), C(100,200), D(50,225) y E (0,225).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 2000x + 3000y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(200,0), C(100,200), D(50,225) y E (0,225). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 2000(0)+3000(0) = 0; F(200,0) = 2000(200)+3000(0) = 400000; **F(100,200)** = 2000(100) + 3000(200) = **800000**; F(50,225) = 2000(50)+3000(225) = 775000; F(0,225) = 2000(0) + 3000(225) = 675000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 800000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(100,200). Es decir el máximo beneficio se alcanza vendiendo 100 tapices tipo A y 200 tapices tipo B**
b)
¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

100 tapices de tipo A equivalen a 1·100 = 100 kg de hilo de seda y 2·100 = 200 kg de hilo de plata.
200 tapices de tipo B equivalen a 2·200 = 400 kg de hilo de seda, 1·200 = 200 kg de hilo de plata y 1·200 = 200 kg de hilo de oro..

Hilo de seda gastado = 100 + 400 = 500. **Quedan** 500 – 500 = **0 kg de hilo de seda.**
Hilo de plata gastado = 200 + 200 = 400. **Quedan** 400 – 400 = **0 kg de hilo de plata.**
Hilo de oro gastado = 200. **Quedan** 225 – 200 = **25 kg de hilo de oro.**

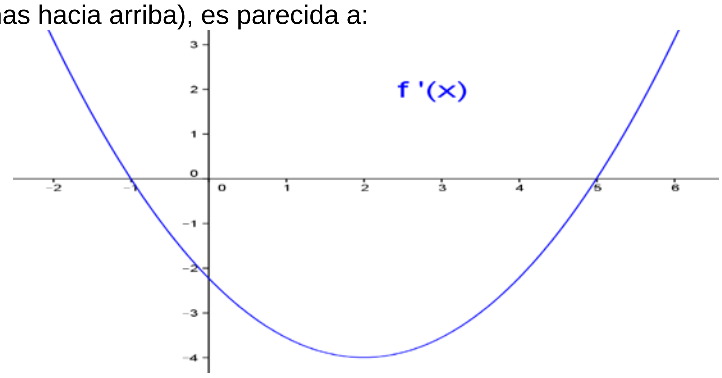
EJERCICIO 2 (B)

Sea f(x) una función cuya función derivada, f ‘(x), tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos (-1,0) y (5,0) y con vértice (2,-4)
a) (1 punto) Estudie razonadamente la monotonía de f(x).
b) (0’5 puntos) Determine las abscisas de los extremos relativos de la función f(x).
c) (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la grafica de f(x) en el punto de abscisa x = 2, sabiendo que f(2) = 5.

Solución

Sea f(x) una función cuya función derivada, f ‘(x), tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos (-1,0) y (5,0) y con vértice (2,-4)
a)
Estudie razonadamente la monotonía de f(x).

Con los datos anteriores la gráfica de f’ (es una parábola, que tiene el vértice debajo de los cortes con el eje OX, luego tiene las ramas hacia arriba), es parecida a:



Observando la gráfica de f ’(x) vemos que f’(x) > 0 (encima del eje OX) en el intervalo (-∞,-1), es decir *f estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (-∞,-1).
Observando la gráfica de f ’(x) vemos que f’(x) < 0 (debajo del eje OX) en el intervalo (-1,5), es decir *f*

estrictamente decreciente $(\searrow)$ en el intervalo (-1,5).

Observando la gráfica de f '(x) vemos que f'(x) > 0 (encima del eje OX) en el intervalo (5,+∞), es decir *f estrictamente creciente* $(\nearrow)$ en el intervalo (5,+∞).

Por definición x = -1 es un máximo relativo.
Por definición x = 5 es un mínimo relativo.
(este es el apartado (b))

c)
Halla la ecuación de la recta tangente a la grafica de f(x) en el punto de abscisa x=2, sabiendo que f(2)=5.

La ecuación de la recta tangente en x = 2 es "y – f(2) = f '(2)·(x – 2)"
Me icen que f(2) = 5, y que la gráfica de f ' pasa por (2,-4), es decir me dan f '(2) = - 4.

La recta tangente pedida es " y – 5 = -4(x – 2) ", es decir y = -4x + 13.

EJERCICIO 3 (B)
De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que p(A) = 0'3 y que $p(B^C)$ = 0'25. Calcule las siguientes probabilidades.
a) (0'75 puntos) $p(A\cup B)$.
b) (0'75 puntos) $p(A^C\cap B^C)$.
c) (1 punto) $p(A/B^C)$.

Solución

De los sucesos aleatorios independientes A y B se sabe que p(A) = 0'3 y que $p(B^C)$ = 0'25. Calcule las siguientes probabilidades.
a)
$p(A\cup B)$.

Del problema tenemos: p(A) = 0'3 y $p(B^C)$ = 0'25; A y B independientes es decir $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$;

$p(B) = 1 - p(B^C)$; $p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$.

Me piden $p(A\cup B)$.
De $p(B^C)$ = 0'25, tenemos $p(B) = 1 - p(B^C)$ = 1 – 0'25 = 0'75.
De $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$, tenemos $p(A\cap B)$ = 0'3·0'75 = 0'225.

Luego $\mathbf{p(A\cup B)}$ = $p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'3 + 0'75 – 0'225 **= 0'825.**
b)
$p(A^C\cap B^C)$.

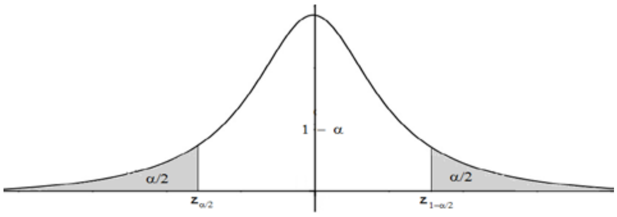
Me piden $\mathbf{p(A^C\cap B^C)}$ = $p(A\cup B)^C$ = $1 - p(A\cup B)$ = 1 - 0'825 = **0'175.**
c)
$p(A/B^C)$.

Me piden $\mathbf{p(A/B^C)} = \dfrac{p(A\cap B^C)}{p(B^C)} = \dfrac{p(A) - p(A\cap B)}{0'25} = \dfrac{0'3 - 0'225}{0'25}$ = **0'3.**

EJERCICIO 4 (B)
El tiempo que los españoles dedican a ver la televisión los domingos es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 75 minutos. Elegida una muestra aleatoria de españoles se ha obtenido, para la media de esa distribución, el intervalo de confianza (188'18, 208'82), con un nivel del 99%.
a) (1'5 puntos) Calcule la media muestral y el tamaño de la muestra.
b) (1 punto) Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de 500 y un nivel de confianza del 96%.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

Vemos que $\overline{x} = (a + b)/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media.

Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$.

El tiempo que los españoles dedican a ver la televisión los domingos es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 75 minutos. Elegida una muestra aleatoria de españoles se ha obtenido, para la media de esa distribución, el intervalo de confianza (188'18, 208'82), con un nivel del 99%.

a)

Calcule la media muestral y el tamaño de la muestra.

Datos del problema: Intervalo = (188'18, 208'82) = (a,b), $\sigma = 75$, $\overline{x} = (a + b)/2$, $E = (b - a)/2$; nivel de confianza = 99% = 0'99 = $1 - \alpha$, de donde $\alpha = 0'01$

De $1 - \alpha = 0'99$, tenemos $\alpha = 1 - 0'99 = 0'01$, de donde $\alpha/2 = 0'01/2 = 0'005$

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, y una de las mas próximas es 0'9949 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'57$.

Hemos visto que **la media muestral es $\overline{x}$** = (a + b)/2 = (188'18 + 208'82)/2 = **198'5.**

Tenemos que el error = E = (b – a)/2 = (208'82 – 188'18)/2 = 10'32, luego el tamaño de la muestra es:

$n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'57 \cdot 75}{10'32}\right)^2 \cong 348'8425$, es decir **el tamaño mínimo es n = 349**.

b)

Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de 500 y un nivel de confianza del 96%.

Datos del problema: n = 500, $\sigma = 75$, nivel de confianza = 96% = 0'96 = $1 - \alpha$, de donde $\alpha = 0'04$

De $1 - \alpha = 0'96$, tenemos $\alpha = 1 - 0'96 = 0'04$, de donde $\alpha/2 = 0'04/2 = 0'02$

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'98 no viene, y la mas próxima es 0'9798 que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 2'05$.

De $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $E < 2'05 \cdot \frac{75}{\sqrt{500}} \cong 6'8759$, es decir **el error máximo admisible para la muestra de 500 es de 6'8759.**