SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2013 MODELO (ESPECÍFICO)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

a) (1 punto) Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos mas el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, coma máximo, puede transportar este barco?"

b) (1'5 puntos) Dado el recinto limitado por las inecuaciones

$$y \geq 30, \quad 3x - y \geq 150, \quad 6x + 7y \leq 840,$$

halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x, y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

Solución

a)

Plantee, sin resolver, el siguiente problema:

"Un barco puede transportar vehículos de dos tipos: coches y motos. Las condiciones de la nave obligan a que el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble; además, la suma del número de motos mas el doble del número de coches no puede ser mayor que 100. ¿Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco?"

"x" = Número de coches.
"y" = Número de motos.
Función Objetivo **F(x,y) = x + y**. (Cuántos vehículos, como máximo, puede transportar este barco)
Restricciones:
De "el número de motos no pueda ser inferior a la cuarta parte del de coches ni superior a su doble", tenemos $\rightarrow$ $y \geq x/4$ e $y \leq 2x$
De "la suma del número de motos mas el doble del número de coches no puede ser mayor que 100", tenemos $\rightarrow$ $2x + y \leq 100$
"Se transporta algún vehículo" $\rightarrow$ $x \geq 0, y \geq 0$

Resumiendo tenemos las **desigualdades:** $\mathbf{y \geq x/4, \quad y \leq 2x, \quad 2x + y \leq 100, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0}$

b)
Dado el recinto limitado por las inecuaciones

$$y \geq 30, \quad 3x - y \geq 150, \quad 6x + 7y \leq 840,$$

halle en qué puntos de ese recinto la función $F(x,y) = 6x - 2y$ alcanza su valor mínimo.

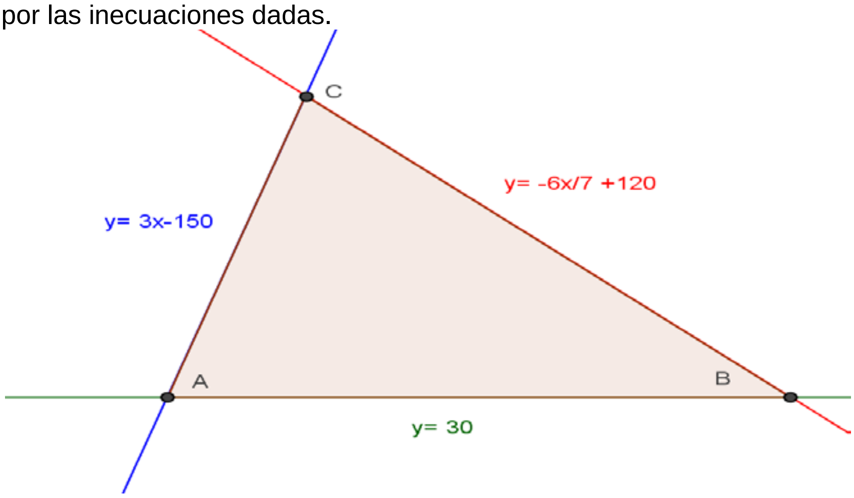
Función Objetivo **F(x,y) = 6x - 2y**
Restricciones: Las desigualdades $y \geq 30, \quad 3x - y \geq 150, \quad 6x + 7y \leq 840$

Las desigualdades $y \geq 30, \quad 3x - y \geq 150, \quad 6x + 7y \leq 840$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $y = 30, \quad 3x - y = 150, \quad 6x + 7y = 840$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = 30, \quad y = 3x - 150, \quad y = -6x/7 + 120$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $y = 30$ e $y = 3x - 150$, tenemos $30 = 3x-150$, luego $180 = 3x$, de donde $x = 60$. Punto de corte. Punto de corte A(60,30).
De $y = 30$ e $y = -6x/7+120$, tenemos $30 = -6x/7+120$, es decir $210 = -6x+840$, luego $6x = 630$ por tanto $x=105$. Punto de corte B(105,30).
De $y = 3x - 150$ e $y = -6x/7 + 120$, tenemos $3x - 150 = -6x/7 + 120$, de donde "$21x-1050 = -6x+840$", es decir $27x = 1890$, luego "$x = 70$" e "$y = 60$", y el punto de corte es C(70,60).

Vemos que los vértices del recinto son: A(60,30), B(105,30) y C(70,60).

Calculemos el mínimo de la función $F(x,y) = 6x - 2y$ en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(60,30), B(105,30) y C(70,60). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

$F(60,30) = 6(60) - 2(30) = 300$; $F(105,30) = 6(105) - 2(30) = 570$;
F(70,60) $= 6(70) - 2(60)$ **= 300**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es 300** (el menor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(60,30) y el vértice C(70,60), es decir en todos los puntos del segmento AC.**

EJERCICIO 2 (A)

Estudie la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ -x^2 + 6x + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Solución

Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua.
La función e^x es una función exponencial y es continua y derivable en R, en particular en $x < 0$.

Las funciones "1" y "$-x^2 + 6x + 2$" son funciones polinómicas, por tanto continuas y derivables en todo R, en particular una en $0 < x < 3$ y la otra en $x > 3$. Sólo nos falta ver la continuidad y derivabilidad en $x = 0$ y $x = 3$.

Veamos la continuidad en $x = 0$

$f(x)$ es continua en $x = 0$ si $f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$.
$f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x) = e^0 = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1$, por tanto $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Veamos la continuidad en $x = 3$

$f(x)$ es continua en $x = 3$ si $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x)$.
$f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (1) = 1$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (-x^2 + 6x + 2) = -(3)^2 + 6(3) + 2 = 11$. Como los resultados son distintos (1 y 11), **f(x) no es continua en x = 3 y por tanto tampoco es derivable en x = 3.**

$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ -x^2 + 6x + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$; $\quad f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -2x + 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$f(x)$ es derivable en x = o si $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.
$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} (e^x) = e^0 = 1$; $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (0) = 0$. Como los resultados son distintos (1 y 0), **f(x) no es derivable en x = 0.**

Por tanto f(x) es derivable en R – {0,3}.

EJERCICIO 3 (A)

Una granja avícola dedicada a la producción de huevos posee un sistema automático de clasificación en tres calibres según su peso: grande, mediano y pequeño. Se conoce que el 40% de la producción es clasificada como huevos grandes, el 35% como medianos y el 25% restante como pequeños. Además, se sabe que este sistema de clasificación produce defectos por rotura en el cascarón que dependen del peso. Así, la probabilidad de que un huevo grande sea defectuoso por esta razón es del 5%, la de uno mediano del 3% y de un 2% la de uno pequeño. Elegido aleatoriamente un huevo,

a) (1'25 puntos**)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

b) (1'25 puntos**)** Si el huevo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea grande?

Solución

Una granja avícola dedicada a la producción de huevos posee un sistema automático de clasificación en tres calibres según su peso: grande, mediano y pequeño. Se conoce que el 40% de la producción es clasificada como huevos grandes, el 35% como medianos y el 25% restante como pequeños. Además, se sabe que este sistema de clasificación produce defectos por rotura en el cascarón que dependen del peso. Así, la probabilidad de que un huevo grande sea defectuoso por esta razón es del 5%, la de uno mediano del 3% y de un 2% la de uno pequeño. Elegido aleatoriamente un huevo,

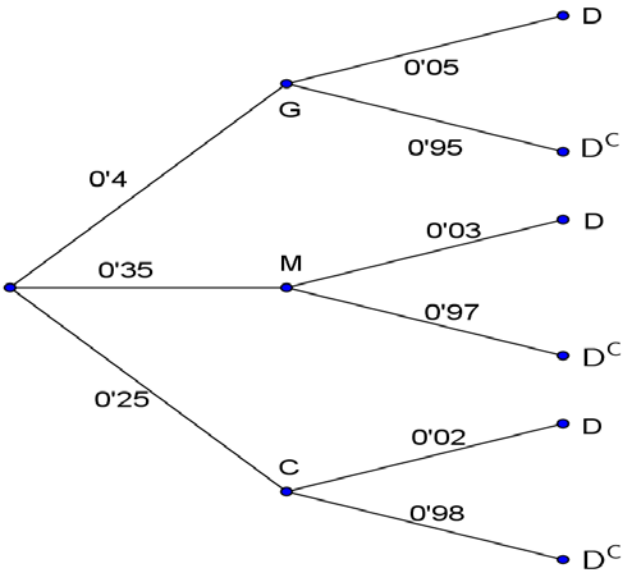
a)

¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Llamemos G, M, C, D y D^C, a los sucesos siguientes, "huevo grande", "huevo mediano", " huevo pequeño", "huevo defectuoso" y " huevo no defectuoso", respectivamente.

Además tenemos p(G) = 40% = 0'4, p(M) = 35% = 0'35, p(C) = 25% = 0'25, p(D/G) = 5% = 0'05, p(D/M) = 3% = 0'03 y p(D/C) = 2% = 0'02.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)

¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que sea defectuoso es:

p(D) = p(G).p(D/G) + p(M).p(D/M) + p(C).p(D/C) =

= (0'4)·(0'05) + (0'35)·(0'03) + (0'25)·(0'02) **= 0'0355.**

b)

Si el huevo es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que sea grande?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(G/D) =} \frac{p(G\cap D)}{p(H)} = \frac{p(G)\cdot p(D/G)}{p(D)} = \frac{(0'4)\cdot(0'05)}{0'0355} = 40/71 \cong \mathbf{0'56338}.$$

EJERCICIO 4 (A)

(2'5 puntos) Un director sanitario sostiene que el índice de Masa Corporal (IMC) media de los adolescentes de su distrito no supera el nivel 25 (sobrepeso). Para contrastar su afirmación toma una muestra aleatoria de 225 adolescentes que da como resultado un IMC medio de 26. Sabiendo que el IMC sigue una distribución Normal con desviación típica 5 discuta, mediante un contraste de hipótesis con $H_0 : \mu \le 25$, si la afirmación del director sanitario es correcta, con un nivel de significación del 5%.

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de medias sigue también una distribución normal:* $N(\mu_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $\mu_0 = 25$; $\overline{x} = 26$, $\sigma = 5$, n = 225; nivel significación = 5%

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

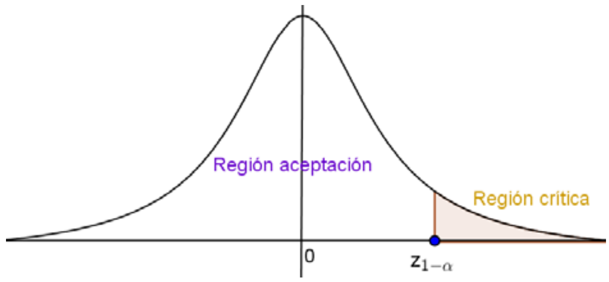
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \le 25$ (el IMC no supera el nivel 25) y $H_1 : \mu_0 > 25$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico* $z_{1-\alpha}$.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 5% = 0'05, luego tenemos $1 - \alpha$ = 0,95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$ = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y uno de los valores más próximos es 0'9495 el cual corresponde al **valor crítico** $z_{1-\alpha}$ = = 1'64 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{26 - 25}{5/\sqrt{225}} = 3$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = 3$ está a la derecha del punto crítico 1'64, estamos en la zona de rechazo.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 25$, y aceptamos la hipótesis alternativa $H_1 : \mu_0 > 25$, para un nivel de significación α = 0'05.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, la afirmación del director no es correcta.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Calcule A^2 y A^{2013}.

b) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a)
Calcule A^2 y A^{2013}.

$A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

$A^{2013} = A^{2012}\cdot A = (A^2)^{1006}\cdot A = (I_2)^{1006}\cdot A = (I_2)\cdot A = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)
Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$.

Utilizando el apartado (a) de $A\cdot X + I_2 = 5B^t - A^2$, tenemos $A\cdot X + I_2 = 5B^t - I_2$., es decir $A\cdot X = 5B^t - 2\cdot I_2$. Veremos enseguida que la matriz A tiene matriz inversa A^{-1}, por tanto multiplicando $A\cdot X = 5B^t - 2\cdot I_2$, por la izquierda por A^{-1}, tenemos $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot 5B^t - A^{-1}\cdot 2\cdot I_2$, es decir $I_2\cdot X = 5\cdot A^{-1}\cdot B^t - 2\cdot A^{-1}\cdot I_2$, luego la matriz pedida es $X = 5\cdot A^{-1}\cdot B^t - 2\cdot A^{-1}$.

A tiene inversa si, mediante transformaciones elementales, podemos pasar de $(A|I_2)$ a $(I_2|A^{-1})$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix}\text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2\end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$, por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$.

También podemos calcular A^{-1} por la fórmula $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$; $A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (1/-1)\cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$
$= A$. Como vemos sale lo mismo.

Luego $X = 5\cdot A^{-1}\cdot B^t - 2\cdot A^{-1} = 5\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 15 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - x} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.
b) (1 punto) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - x} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a)
Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función.

Sabemos que si una función es derivable entonces también es continua.

La función $\dfrac{1}{2 - x}$ es una función racional, y es continua y derivable en R – {2 (nº que anula el denominador) }, en particular en x < 1.

La función "$x^2 - 6x + 6$" es una función polinómica, por tanto continuas y derivables en todo R, en particular una en x > 1. Sólo nos falta ver la continuidad y derivabilidad en x = 1.

Veamos la continuidad en x = 1

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

$f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2-x}\right) = 1/1 = 1$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 - 6x + 6) = (1)^2 - 6(1) + 6 = 1$, por tanto **f(x) es continua en x = 1**, porque son iguales ambos valores (1 = 1).

Veamos la derivada en x = 1.

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$; $\quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{0 -1(-1)}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2-x)^2} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(2-x)^2} = 1/1^0 = 1$; $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x - 6) = -4$. Como los resultados son distintos (1 y -4), **f(x) no es derivable en x = 1.**

Por tanto f(x) es derivable en R – {1}.

b)

Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

X = 0 está en la rama $x \le 1$, luego $f(x) = \frac{1}{2-x}$ y $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$

La recta tangente en x = 0 es “ y – f(0) = f ’(0)(x – 0) “

De $f(x) = \frac{1}{2-x}$, tenemos f(0) = 1/2. De $f'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$, tenemos $f(0) = 1/2^2 = 1/4$.

La recta tangente pedida es **y - 1/2 = (1/4)x**, o bien **y = x/4 + 1/2**.

EJERCICIO 3 (B)

A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

a) (0’5 puntos) Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.

b) (0’75 puntos) La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?

c) (1 punto) Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

Solución

A la Junta General de Accionistas de una empresa asisten 105 accionistas de los cuales 45 tienen menos de 40 años y 18 más de 60 años. Sometida a votación una propuesta, es rechazada por la tercera parte de los menores de 40 años, por la tercera parte de los que están entre 40 y 60 años y por 4 personas mayores de 60 años; los demás la aceptan.

a)

Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.

Llamemos A, B, C, Ac y Ac^C, a los sucesos siguientes, “< 40 años”, “entre 40 y 60 años”, "> 60 años”, “acepta propuesta" y "no acepta propuesta ", respectivamente.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	< 40 años =A	Entre 40 y 60 años=B	> 60 años =C	Totales
Acepta = Ac		3		
No acepta = Ac^C	45/3	42/3	4	

Totales	45	x=42	18	105

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	< 40 años =A	Entre 40 y 60 años=B	> 60 años =C	Totales
Acepta = Ac	**30**	**28**	**14**	**72**
No acepta = Ac^C	15	**14**	4	**33**
Totales	45	**42**	18	105

a)
Calcule la probabilidad de que, elegida una persona al azar, tenga menos de 40 años y haya aceptado la propuesta.

p(< 40 y acepta) = p(A∩Ac) = $\dfrac{\text{Total < 40 y acepta}}{\text{Total aceptan}}$ = 30/72 = 5/12 ≅ **0'41667**.

b)
La prensa afirmó que la propuesta había sido aceptada por el 80% de los asistentes, ¿es correcta la afirmación?

p(Aceptar) = $\dfrac{\text{Total aceptan}}{\text{Total personas}}$ = 72/105 = 24/35 ≅ **0'6857 = 68'58%, por tanto la afirmación de la prensa no es correcta.**.

c)
Si una persona escogida al azar ha rechazado la propuesta, ¿qué probabilidad hay de que tenga más de 60 años?

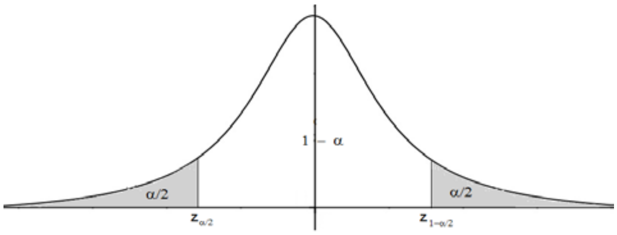
p(> 60 años /Rechaza) = **p(C/Ac^C)** = $\dfrac{\text{Total > 60 y rechaza}}{\text{Total rechazan}}$ = 4/33 ≅ **0'12121212.**

EJERCICIO 4 (B)

En una población próxima a un puerto deportivo se quiere estimar la proporción de habitantes que navegan al menos una vez a la semana. Se toma una muestra, al azar, de 400 habitantes de la población, de los que 160 afirman navegar al menos una vez en semana.
a) (1'5 puntos) Halle el intervalo de confianza del 90% para la proporción de habitantes que navegan al menos una vez en semana.
b) (1 punto) A la vista del resultado, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota del error de 0'1 con el mismo nivel de confianza del apartado anterior. ¿Cuántos individuos debe tener al menos la muestra?

Solución

*Sabemos que si n ≥ 30 para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL* $\hat{p}$ *sigue una normal* $N(\hat{p},\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q}$ = 1- $\hat{p}$, *y generalmente escribimos* $\mathbf{p} \approx N(\hat{p},\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\mathbf{p} \to N(\hat{p},\sqrt{\dfrac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.



*Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción **p** de las muestras es:*

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (b\text{-}a)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1-\alpha/2$.

Trabajamos con la normal N(0,1) tipificada de la normal muestral.

El error cometido es E < $z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ *= (b-a)/2, de donde el tamaño de la muestra es n >* $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2.\hat{p}.\hat{q}}{E^2}$.

En una población próxima a un puerto deportivo se quiere estimar la proporción de habitantes que navegan al menos una vez a la semana. Se toma una muestra, al azar, de 400 habitantes de la población, de los que 160 afirman navegar al menos una vez en semana.
a) (1'5 puntos) Halle el intervalo de confianza del 90% para la proporción de habitantes que navegan al menos una vez en semana.

Datos del problema: $\hat{p}$ = 160/400 = 0'4, $\hat{q}$ = 1 - 0' 4 = 0'6, n = 400, nivel de confianza 1 – α = 90% =
= 0'90, de donde α = 0'10 = 10% como *nivel de significación*.
De α = 0'10 tenemos α/2 = 0'05

De la igualdad p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'05 = 0'95, probabilidad que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'95 no viene en la tabla y uno de los valores más próximos es 0'9495, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ =
= 1'64. Por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(**p**) = $\left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = \left(0'4 - 1'64\cdot\sqrt{\frac{0'4\cdot0'6}{400}}, 0'4 + 1'64\cdot\sqrt{\frac{0'4\cdot0'6}{400}}\right) \cong$

≅ **(0'35983; 0'44017)**
b)
A la vista del resultado, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota del error de 0'1 con el mismo nivel de confianza del apartado anterior. ¿Cuántos individuos debe tener al menos la muestra?

Datos: $z_{1-\alpha/2}$ = 1'64, $\hat{p}$ = 0'4, $\hat{q}$ = 0'6; error máximo = E ≤ 0'1.

De n ≥ $\frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'64)^2\cdot0'4\cdot0'6}{0'1^2}$ ≅ 64'55, tenemos que **el tamaño mínimo de la muestra es n = 65**.