SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SEPTIEMBRE 2013 MODELO

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sea R la región factible definida por las inecuaciones $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$.
a) (0'5 puntos) Razone si el punto (4'5,1'55) pertenece a R.
b) (1'5 puntos) Dada In función objetivo F(x,y) = 2x - 3y, calcule sus valores extremos en R.
c) (0'5) puntos) Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3'5. ¿Y 7'5?

Solución

Sea R la región factible definida por las inecuaciones $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$.
(a) y (b)
Razone si el punto (4'5,1'55) pertenece a R. Dada la función objetivo F(x,y) = 2x – 3y, calcule sus valores extremos en R.

El punto (4'5,1'55) pertenece a la región factible R, si verifica a la vez las inecuaciones $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$.
Como $(4'5) \geq 3(1'55) \rightarrow 4'5 \geq 4'65$, lo cual es FALSO, por tanto **el punto (4'5,1'55) no pertenece a R.**

Función Objetivo **F(x,y) = 2x - 3y**.
Restricciones: $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$

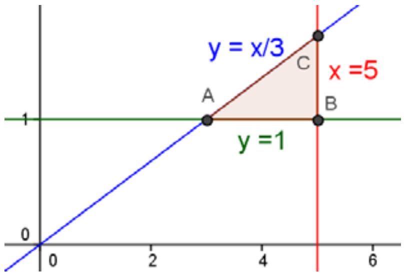
El punto (4'5,1'55) pertenece a R
Las desigualdades $x \geq 3y$, $x \leq 5$, $y \geq 1$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

$$x = 3y, \quad x = 5, \quad y = 1$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = x/3, \quad x = 5, \quad y = 1$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De y = 1 e y = x/3, tenemos 1 = x/3, luego 3 = x, de donde y = 1. Punto de corte A(3,1).
De y = 1 y x = 5. Punto de corte B(5,1).
De x = 5 e y = x/3, tenemos y = 5/3, de donde el punto de corte es C(5,5/3).

Vemos que la región factible es el polígono limitado por los vértices del recinto son: A(3,1), B(5,1) y C(5,5/3).

Calculemos los extremos de la función F(x,y) = 2x - 3y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(3,1), B(5,1) y C(5,5/3). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(3,1) = 2(3) - 3(1) **= 3**; **F(5,1)** = 2(5) - 3(1) **= 7**; F(5,5/3) = 2(5) - 3(5/3) = 5.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 7** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(5,1) y el mínimo absoluto de la función F en la región es 3** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(3,1).**
c)
Razone si hay algún punto de R donde la función F valga 3'5. ¿Y 7'5?

Cómo el mínimo absoluto vale 3 y el máximo absoluto vale 7, **el valor 3'5 se alcanza en R, porque está entre 3 y 7**, pero **el valor 7'5 no se alcanza en R pues mayor que el máximo absoluto de F.**

EJERCICIO 2 (A)

En una empresa el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t) = \dfrac{11t + 17}{2t + 12}$, $t \geq 1$, donde t es el número de días trabajados.

a) (0'5 puntos) ¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?
b) (0'75 puntos) ¿Qué ocurrirá con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?
c) (0'75 puntos) El dueño de la empresa cree que el número de montajes aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia.
d) (0'5 puntos) Dibuje la grafica de la función.

Solución

En una empresa el número de montajes diarios realizados por un trabajador depende de los días trabajados según la función $M(t) = \dfrac{11t + 17}{2t + 12}$, $t \geq 1$, donde t es el número de días trabajados.

a)
¿Cuántos montajes realiza el primer día? ¿Cuántos días necesitará para realizar cinco montajes diarios?

Los montajes realizados el primer día son M(1) = $\dfrac{11(1) + 17}{2(1) + 12}$ = 28/14 **= 2**.

Para ver cuantos días se necesitan par realizar 5 montajes diarios hay que resolver la ecuación:

$5 = \dfrac{11t + 17}{2t + 12}$, es decir $5(2t + 12) = 11t + 17 \rightarrow 10t + 60 = 11t + 17$, de donde $44 = t$. **Hay esperar 44 días para que se realicen 5 montajes diarios.**

b)
¿Qué ocurrirá con el número de montajes diarios si trabajara indefinidamente?

Nos están pidiendo el comportamiento en $+\infty$, es decir $\lim_{t\to\infty} M(t) = \lim_{t\to\infty} \dfrac{11t + 17}{2t + 12} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{11t}{2t}$ = 11/2 = 5'5. **Si se trabajará indefinidamente se obtendrían 5'5 montajes diarios.**

c)
El dueño de la empresa cree que el número de montajes aumenta con los días de trabajo. Estudiando la función, justifique si es cierta dicha creencia.

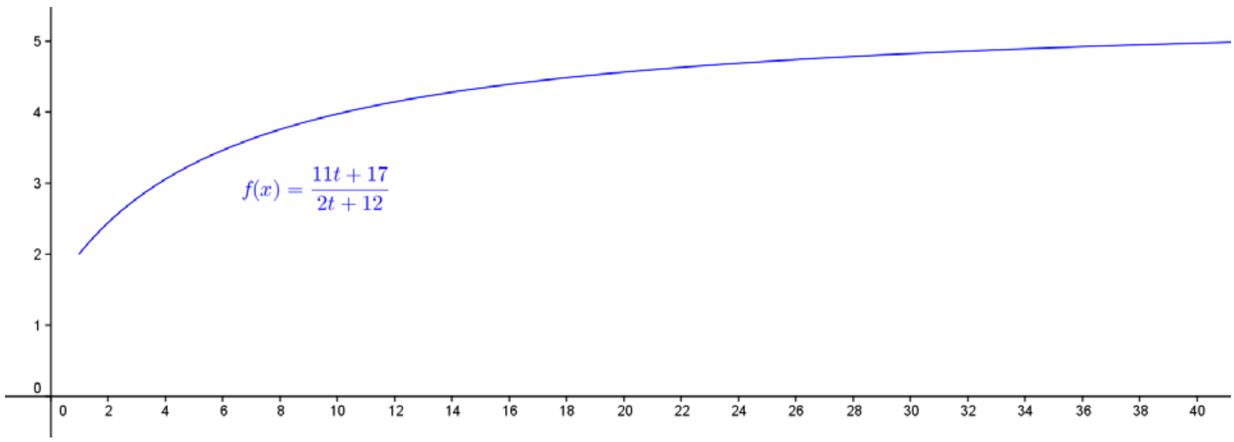
Vamos a estudiar la monotonía (estudio de M'(t)) para $t \geq 1$.

$M(t) = \dfrac{11t + 17}{2t + 12} \rightarrow M'(t) = \dfrac{11(2t+12)-2\cdot(11t+17)}{(2t+12)^2} = \dfrac{+98}{(t+2)^2}$

Como $M'(t) > 0$, para cual valor de $t > 1$, la función M(t) siempre es estrictamente creciente por tanto **el dueño de la empresa lleva razón**.

d)
Dibuje la grafica de la función.

La gráfica es un trozo de hipérbola. Ya sabemos que es estrictamente creciente.
La recta y = 5'5 es una asíntota horizontal en $+\infty$, porque $\lim_{t\to+\infty} M(t) = 5'5$.
La recta t = -6 (no está en el dominio) es una asíntota vertical.
Tenemos el punto (1,2), por tanto un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3 (A)

Se cree que hay una vuelta hacia estilos de bailes más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40% les gusta la salsa, al 30% le gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa como el merengue.
a) (0'75 puntos) ¿Cual es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?
b) (0'75 puntos) ¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?
c) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

Solución

Se cree que hay una vuelta hacia estilos de bailes más populares, por lo que se realiza una encuesta a estudiantes de bachillerato, resultando que al 40% les gusta la salsa, al 30% le gusta el merengue y al 10% les gusta tanto la salsa como el merengue.
a)
¿Cuál es la probabilidad de que a un estudiante le guste el merengue si le gusta la salsa?

Llamemos A y B, a los sucesos siguientes, "les gusta la salsa" y "les gusta el merengue ", respectivamente.

Del problema tenemos: p(A) = 40% = 0'4, p(B) = 30% = 0'3 y p(A y B) = $p(A\cap B)$ = 10% = 0'1.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A \text{ y no}B) = p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$;

A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; A y B son compatibles si $p(A\cap B) \neq 0$; $p(A^C) = 1 - p(A)$.

Me piden **p(A/B)** = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ = 0'1/0'3 **= 1/3**.

b)
¿Y la de que a un estudiante le guste el merengue si no le gusta la salsa?

Me piden **p(B/A^C)** = $\frac{p(B\cap A^C)}{p(A^C)} = \frac{p(B) - p(A\cap B)}{1 - p(A)} = \frac{0'3 - 0'1}{1 - 0'4}$ = 0'2/0'6 **= 1/3.**

c)
¿Son independientes los sucesos "gustar la salsa" y "gustar el merengue"? ¿Son compatibles?

Como $p(A\cap B) = 0'1 \neq 0$, **los sucesos A y B son compatibles.**
Como $p(A\cap B) = 0'1 \neq 0'4\cdot 0'3 = p(A)\cdot p(B)$, **los sucesos A y B son dependientes.**

EJERCICIO 4 (A)

(2'5 puntos) En una bodega utilizan una maquina que debe envasar el vino en botellas con un contenido de 750 ml. Para comprobar si esa máquina funciona correctamente, se toma una muestra de 36 botellas y se observa que el contenido medio de las mismas es de 748 ml. Suponiendo que la variable "contenido" sigue una distribución Normal con varianza 25, analice mediante un contraste de hipótesis bilateral ($H_o : \mu = 750$) si se puede aceptar, con un nivel de significación de 0'05, que la maquina envasadora funciona correctamente.

Solución

Sabemos que si tenemos una población que sigue una distribución normal $N(\mu,\sigma)$ y extraemos de ella muestras de tamaño n, *la distribución muestral de medias* $\overline{X}$ *sigue también una distribución normal:* $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)
También se puede hacer con la distribución normal muestra y es parecido a los intervalos de confianza.

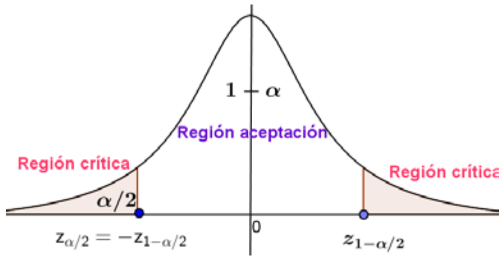
En una bodega utilizan una maquina que debe envasar el vino en botellas con un contenido de 750 ml. Para comprobar si esa máquina funciona correctamente, se toma una muestra de 36 botellas y se observa que el contenido medio de las mismas es de 748 ml. Suponiendo que la variable "contenido" sigue una distribución Normal con varianza 25, analice mediante un contraste de hipótesis bilateral ($H_o : \mu = 750$) si se puede aceptar, con un nivel de significación de 0'05, que la maquina envasadora funciona correctamente.

Este problema nos plantea un contraste bilateral.

Datos dados: $\mu_0 = 750$; n = 36; varianza = $\sigma^2 = 25$, desviación típica = $\sigma = 5$; $\overline{x} = 748$; nivel de significación = α = 0'05.

El problema la dividimos en cinco etapas:

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.
Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: $\mu_0 = 750$ ml y H_1: $\mu_0 \neq 750$ ml.
<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.
La prueba es bilateral y con un nivel de significación α = 0'05, con lo cual $\alpha/2$ = 0,05/2 = 0'025.
De $p(Z \leq z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 – 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) obtenemos $z_{1-\alpha}$ = 1'96, con lo cual le corresponde por **valores críticos** $z_{1-\alpha}$ = 1'96 y $z_{\alpha} = - z_{1-\alpha}$ = -1'96, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.
En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{748 - 750}{5/\sqrt{36}}$ = - 2'4,
<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = - 2'4 **es menor que el valor crítico** $z_{\alpha/2}$ =
= -1'96, vemos que nos encontramos en la zona de rechazo. Por tanto, **tomamos la decisión de rechazar la aceptar hipótesis nula H_0**: μ_0 = 750 ml, a este nivel de significación.
En consecuencia, podemos rechazar la hipótesis nula H_0 **y aceptar la hipótesis alternativa** H_1: $\mu_0 \neq 750$ ml. **Es decir máquina envasadora no funciona correctamente, pues al estar en la zona de rechazo envasa menos de 750 ml al nivel de significación 0'05**, pudiendo haber cometido un error del tipo I.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3/5 & -1 \\ 4/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
a) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $(2A + B)\cdot X = 3A^t – B$.
b) (1 punto) Determine en cada caso las dimensiones de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C\cdot D + A$, $C^t\cdot D\cdot C$, $D\cdot C^t$, $C\cdot D\cdot C^t$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3/5 & -1 \\ 4/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a)
Resuelva la ecuación matricial $(2A + B)\cdot X = 3A^t – B$.

$$3A^t - B = 3\cdot\begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/5 & -1 \\ 4/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -6/5 \\ 0 & 9/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/5 & -1 \\ 4/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ -4/5 & 1 \end{pmatrix} = (1/5)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = E$$

$$2A + B = 2\cdot\begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ -2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -1 \\ 4/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ -4/5 & 6/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -1 \\ 4/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = F.$$

La matriz F tiene inversa si, mediante transformaciones elementales, podemos pasar de la matriz $(F|I_2)$ a la matriz $(I_2|F^{-1})$.

$$(F|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2/2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right)^{F_1+F_2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = (I_2|F^{-1}), \text{ por tanto } F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

También podemos calcular F^{-1} por la fórmula $F^{-1} = (1/|F|)\cdot Adj(F^t)$.

$$|F| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0;\ F^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\ Adj(F^t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ F^{-1} = (1/|F|)\cdot Adj(F^t) = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Como vemos sale lo mismo.

De $(2A + B)\cdot X = 3A^t - B$, es decir $F\cdot X = E$, multiplicando por la izquierda por la inversa de F, F^{-1}, tenemos: $F^{-1}\cdot F\cdot X = F^{-1}\cdot E \rightarrow I_2\cdot X = F^{-1}\cdot E \rightarrow X = F^{-1}\cdot E$

La matriz pedida es $\mathbf{X} = F^{-1}\cdot E = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot(1/5)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = (1/10)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = (1/10)\cdot\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2/5 & 3/10 \\ -2/5 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b)

Determine en cada caso las dimensiones de la matriz D para que se puedan realizar las siguientes operaciones: $C\cdot D + A$, $C^t\cdot D\cdot C$, $D\cdot C^t$, $C\cdot D\cdot C^t$.

Para que tenga sentido el producto de matrices, *el número de columnas de la matriz de la izquierda tiene que coincidir con el número de filas de la matriz de la derecha, y el producto tien porfilas la de la 1ª matriz y columnas la de la 2ª matriz.*

Para que tenga sentido la suma tienen que tener la misma dimensión.

$C_{2x3}\cdot D + A_{2x2}$, **luego la operación tiene sentido si D_{3x2}**.
$C^t_{3x2}\cdot D\cdot C_{2x3}$, **luego la operación tiene sentido si D_{2x2}**.
$D\cdot C^t_{3x2}$, **luego la operación tiene sentido si D_{nx3}. Siendo "n" cualquier nº natural**.
$C_{2x3}\cdot D\cdot C^t_{3x2}$, **luego la operación tiene sentido si D_{3x3}**.

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en x = 2 y, además, tenga un mínimo en x = 1.

b) (1 punto) Para a = 2 y b = 6, determine la ecuación de la recta tangente a la grafica de la función en el punto de abscisa x = -2.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a)

Determine los valores de a y b para que dicha función sea continua en x = 2 y, además, tenga un mínimo en x = 1.

Veamos la continuidad en x = 2

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 - bx + 1) = 5 - b$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x + a) = 4 + a$, por tanto como f(x) es continua en x = 2, ambas expresiones son iguales, es decir **5 – b = 4 + a**.

Como tiene un mínimo en x = 1, sabemos que $f'(1) = 0$.
Vemos que x = 1 está en la rama $x \le 2$, por tanto $f(x) = x^2 - bx + 1 \rightarrow f'(x) = 2x - b$.
De $f'(1) = 0$, tenemos $2(1) - b = 0$, luego **b = 2.**
Entrando en **5 – b = 4 + a** con **b = 2**, tenemos 3 = 4 + a, de donde **a = -1.**

b)

Para a = 2 y b = 6, determine la ecuación de la recta tangente a la grafica de la función en el punto de abscisa x = -2.

Para a = 2 y b = 6, la función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 1 & \text{si } x \le 2 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Vemos que x = -2 está en la rama $x \le 2$, por tanto $f(x) = x^2 - 6x + 1 \rightarrow f'(x) = 2x - 6$.

La recta tangente en x = -2 es " $y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2))$ "
Tenemos $f(-2) = (-2)^2 - 6(-2) + 1 = 17$; $f'(-2) = 2(-2) - 6 = -10$.

La recta tangente pedida es **y - 17 = (-10)(x + 2)**, o bien **y = -10x - 3**.

EJERCICIO 3 (B)

El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.
a) (1 punto) Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague.
b) (0'75 puntos) Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?
c) (0'75 puntos) Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

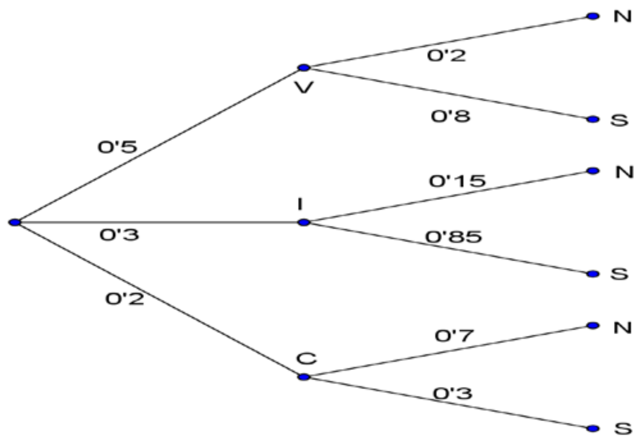
Solución

El 50% de los préstamos que concede un banco son para vivienda, el 30% para industria y el 20% para consumo. No se pagan el 20% de los préstamos para vivienda, el 15% de los préstamos para industria y el 70% de los préstamos para consumo.

Llamemos V, I, C, N y S, a los sucesos siguientes, "préstamo para vivienda", "préstamo para industria", " préstamo para consumo ", "no se paga el préstamo" y " si se paga el préstamo ", respectivamente.

Además tenemos p(V) = 50% = 0'5, p(I) = 30% = 0'3, p(C) = 20% = 0'2, p(N/V) = 20% = 0'2, p(N/I) = 15% = = 0'15 y p(N/C) = 70% = 0'7.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



a)
Si se elige al azar un préstamo, calcule la probabilidad de que se pague.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que se pague el préstamo es:

p(S) = p(V).p(S/V) + p(I).p(S/I) + p(C).p(S/C) = (0'5)·(0'8) + (0'3)·(0'85) + (0'2)·(0'3) **= 0'715.**

b)
Se elige un préstamo al azar que resulta impagado, ¿cuál es la probabilidad de que sea un préstamo para consumo?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(C/N) =} \frac{p(C\cap N)}{p(N)} = \frac{p(C)\cdot p(N/C)}{1 - p(S)} = \frac{(0'2)\cdot(0'7)}{1 - 0'715} = 28/57 \cong \mathbf{0'49123}.$$

c)
Ante un préstamo impagado el director del banco afirma que es más probable que sea para vivienda que para consumo, ¿lleva razón el director?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(V/N) =} \frac{p(V\cap N)}{p(N)} = \frac{p(V)\cdot p(N/V)}{1 - p(S)} = \frac{(0'5)\cdot(0'2)}{1 - 0'715} = 20/57 \cong \mathbf{0'3509}.$$

Comparando el apartado (b) y el apartado (c) vemos que la probabilidad de **préstamo impagado es mayor para el consumo, luego el director no lleva rezón.**

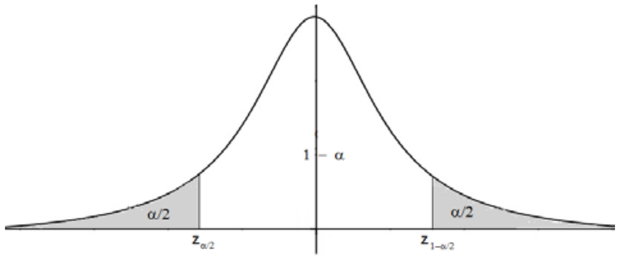
EJERCICIO 4 (B)

El gasto mensual de las familias de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación

típica igual a 180 euros. Seleccionadas 30 familias al azar, han tenido un gasto medio mensual de 900 euros.
a) (1’25 puntos). Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio mensual de las familias de ese municipio con un nivel de confianza del 98%.
b) (1’25 puntos) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el medio mensual de las familias con un error no superior a 60 euros, con el mismo nivel de confianza.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2$*.*

El gasto mensual de las familias de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 180 euros. Seleccionadas 30 familias al azar, han tenido un gasto medio mensual de 900 euros.
a)
Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio mensual de las familias de ese municipio con un nivel de confianza del 98%.

Datos del problema: $\sigma = 180$; $n = 30$; $\overline{x} = 900$; nivel de confianza = 98% = 0’98 = 1 - α, de donde α=0’02, con la cual α/2 = 0’01.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’99 vemos que no viene, la probabilidad más próxima que viene es 0’9901 y corresponden a $z_{1-\alpha/2} = 2'33$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(900 - 2'33 \cdot \frac{180}{\sqrt{30}}, 900 - 2'33 \cdot \frac{180}{\sqrt{30}}\right) \cong$ **(823’428,976’572)**

b)
Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el medio mensual de las familias con un error no superior a 60 euros, con el mismo nivel de confianza.

Datos del problema: $\sigma = 180$; Error = E < 60; igual nivel de confianza, luego $z_{1-\alpha/2} = 2'33$.

De $n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'33 \cdot 180}{60}\right)^2 \cong 48'86$, es decir **el tamaño mínimo es n = 49 familias**.