SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2014 MODELO 2

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

a) (1'75 puntos) Represente gráficamente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices: $x + 2y \le 3$; $x - y \le 1$; $x \ge -1$; $y \ge 0$.

b) (0'75 puntos) Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y) = 2x + 4y$ en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

Solución

a) y b)

a) Represente gráficamente la región definida por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices: $x + 2y \le 3$; $x - y \le 1$; $x \ge -1$; $y \ge 0$.

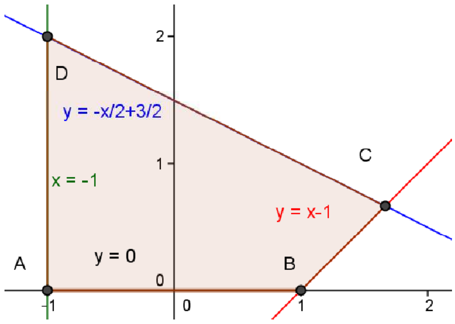
Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y) = 2x + 4y$ en la región anterior y los puntos donde se alcanzan.

Las desigualdades $x + 2y \le 3$; $x - y \le 1$; $x \ge -1$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $x + 2y = 3$; $x - y = 1$; $x = -1$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -x/2 + 3/2;\ \ y = x - 1;\ \ x = -1;\ y = 0.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $x = -1$ e $y = 0$, y el vértice es A(-1,0).

De $y = -x+1$ e $y = 0$, tenemos $-x+1 = 0 \rightarrow x = 1$, y el vértice es B(1,0).

De $y = -x/2+3/2$ e $y = x-1$, tenemos $-x/2+3/2 = x-1 \rightarrow -x+3 = 2x-2 \rightarrow 5 = 3x$, de donde $x = 5/3$ e $y = 5/3-1 = 2/3$, y el vértice es C(5/3,2/3).

De $x = -1$ e $y = -x/2+3/2$, tenemos $y = 4/2 = 2$, y el vértice es D(-1,2).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto son: A(-1,0), B(1,0), C(5/3,2/3) y D(-1,2).

Veamos el máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = 2x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde los alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(-1,0), B(1,0), C(5/3,2/3) y D(-1,2). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(-1,0) = 2(-1) + 4(0) **= -2**; F(1,0) = 2(1) + 4(0) = 2;
F(5/3,2/3) = 2(5/3) + 4(2/3) **= 6**; **F(-1,2)** = 2(-1) + 4(2) **= 6**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es -2** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice A(-1,0) y el máximo absoluto de la función F en la región es 6** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en los vértices C(5/3,2/3) y D(-1,2) por tanto se alcanza en todo el segmento CD.**

EJERCICIO 2 (A)

Sea la función dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) (1’5 puntos) Determine los valores de a y b, sabiendo que dicha función es derivable.
b) (1 punto) Para a = 2 y b = 3, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

Solución

Sea la función dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) Determine los valores de a y b, sabiendo que dicha función es derivable.

Como me dicen que la función es derivable, la función también es continua, en particular en x = 2.
Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^2 + ax) = (2)^2 + a(2) = 4 + 2a$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{x+b}{x-1} = \dfrac{2+b}{2-1} = 2 + b$, como son iguales tenemos **4 + 2a = 2 + b.**

$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$; tenemos $f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{(x-1) - (x+b)}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{-1-b}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x + a) = 2(2) + a = 4 + a$; $\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{-1-b}{(x-1)^2} = \dfrac{-1-b}{(2-1)^2} = -1 - b$, como son iguales tenemos

4 + a = -1 - b, de donde **a = -5 - b.**

De **4 + 2a = 2 + b**, tenemos 4 + 2(-5 - b) = 2 + b → 4 - 10 - 2b = 2 + b → **- 8 = 3b → b = -8/3, con lo cual a = -5 - (-8/3) = -7/3.**

La función f es derivable para **a = -7/3 y b = -8/3.**

b)
Para a = 2 y b = 3, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

Para a = 2 y b = 3, tenemos $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x+3}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$ y tenemos $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{-4}{(x-1)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

Vemos que x = 1 está es la rama x ≤ 2, donde $f(x) = x^2 + 2x$ y f’(x) = 2x + 2.

La recta tangente en x = 1 es “y – f(1) = f’(1)(x – 1)”.
$f(1) = (1)^2 + 2(1) = 3$ y f’(1) = 2(1) + 2 = 4, luego **la recta tangente en x = 1 es “y – 3 = 4(x – 1)”.**

EJERCICIO 3 (A)

En un servicio técnico especializado en cámaras fotográficas, el 70% de las cámaras que se reciben son del modelo A y el resto del modelo B. El 95% de las cámaras del modelo A son reparadas, mientras que del modelo B sólo se reparan el 80%. Si se elige una cámara al azar:
a) (1’25 puntos) Calcule la probabilidad de que no se haya podido reparar.
b) (1’25 puntos) Si se observa que no ha sido reparada, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

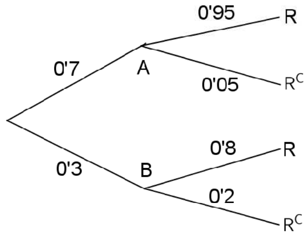
Solución

En un servicio técnico especializado en cámaras fotográficas, el 70% de las cámaras que se reciben son del modelo A y el resto del modelo B. El 95% de las cámaras del modelo A son reparadas, mientras que del modelo B sólo se reparan el 80%. Si se elige una cámara al azar:
a)
Calcule la probabilidad de que no se haya podido reparar.

Llamemos A, B, R y R^C, a los sucesos siguientes, “maquina modelo A”, " maquina modelo B", "reparar" y "no reparar", respectivamente.

Datos del problema p(A) = 70/% = 0’7; p(R/A) = 95/% = 0’95 ; p(R/B) = 80/% = 0’8, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el teorema de la probabilidad total, **la probabilidad de que no se haya podido reparar** es:

$$\mathbf{p(R^C) =} \ p(A).p(R^C/A) + p(B).p(R^C/B) = (0'7)\cdot(0'05) + (0'3)\cdot(0'2) \mathbf{= 0'095}.$$

b)

Si se observa que no ha sido reparada, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo B?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(B/R^C) =} \ \frac{p\left(B \cap R^C\right)}{p(R^C)} = \frac{p\left(B\right).p(R^C/B)}{p(R^C)} = \frac{(0'3)\cdot(0'2)}{0'095} \ \mathbf{= (12/19) \cong 0'6316}.$$

EJERCICIO 4 (A)

Con el fin de estudiar el precio medio del litro de gasolina en una provincia en un determinado día, se seleccionan al azar ese día 9 estaciones de servicio y se observan los siguientes precios, en euros, de un litro de gasolina:

1'3, 1'2, 1'4, 1'27, 1'25, 1'32, 1'37, 1'38,1'23.

Se sabe que el precio del litro de gasolina se distribuye según una ley Normal con desviación típica igual a 0'18 euros.

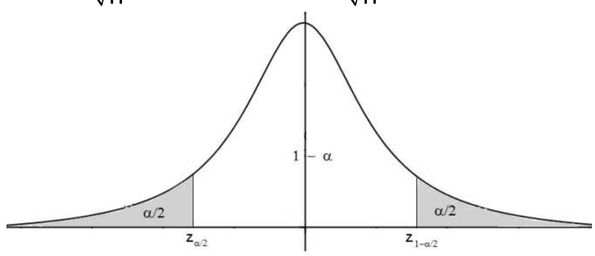
a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para estimar el precio medio del litro de gasolina.

b) (1 punto) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el precio medio del litro de gasolina con un error no superior a 0'08 euros, con el mismo nivel de confianza.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, de donde el tamaño mínimo de

la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

Con el fin de estudiar el precio medio del litro de gasolina en una provincia en un determinado día, se seleccionan al azar ese día 9 estaciones de servicio y se observan los siguientes precios, en euros, de un litro de gasolina:

1'3, 1'2, 1'4, 1'27, 1'25, 1'32, 1'37, 1'38,1'23.

Se sabe que el precio del litro de gasolina se distribuye según una ley Normal con desviación típica igual a 0'18 euros.
a)
Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para estimar el precio medio del litro de gasolina.

Datos del problema: n = 9; $\overline{x}$ = (1'3+1'2+1'4+1'27+1'25+1'32+1'37+1'38+1'23)/9 = 293/225 ≅ 1'30222;
σ = 0'18; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual α/2 = 0'05/2 = 0'025.
De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'975 vemos que viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\textbf{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(\frac{293}{225} - 1'96\cdot\frac{0'18}{\sqrt{9}}, \frac{293}{225} + 1'96\cdot\frac{0'18}{\sqrt{9}}\right) \cong$$

$$\cong \mathbf{(1'18462, 1'41982)}$$

b)
Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el precio medio del litro de gasolina con un error no superior a 0'08 euros, con el mismo nivel de confianza.

Datos del problema: Error E ≤ 0'08, σ = 0'18, igual nivel de confianza = 95% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $n \geq \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96\cdot 0'18}{0'08}\right)^2$ = 19'4481, es decir **el tamaño mínimo de la muestra de estaciones de servicio es de n = 20.**

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

a) (1 punto) Determine los valores de x e y que hacen cierta la igualdad

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial: $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución

a)
Determine los valores de x e y que hacen cierta la igualdad

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+y \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3y \end{pmatrix}$. Igualando $\begin{pmatrix} 2x+y \\ 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3y \end{pmatrix}$, tenemos:

2x + y = 3 → 2x + y = 3 → 2x + y = 3
3x + y = 3y → 3x - 2y = 0 $E_2 + E_1(2)$ → 7x = 6, de donde **x = 6/7** e **y** = 3 - 2(6/7) **= 9/7.**

b)
Resuelva la ecuación matricial: $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \to X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tenemos $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Como det (A) = $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$ = 5 - 6 = -1 ≠ 0, existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (1/-1)\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss
A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 - 2F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) F_2(-1) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) F_1 - 3F_2 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$ por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ por la derecha por la matriz inversa A^{-1}, tenemos

$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow X\cdot I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz pedida es $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2 (B)

El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t, mediante la función
$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$, $6 \le t \le 12$.
a) (0'5 puntos) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?
b) (2 puntos) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

Solución

El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora t, mediante la función
$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$, $6 \le t \le 12$.
a)
¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?

Al comenzar la emisión tenemos t = 6, luego para t = 6, $S(6) = 660 - 231(6) + 27(6)^2 - (6)^3 = 30$, es decir **al comenzar la emisión el 30% de las personas está en audiencia**.
Al finalizar la emisión tenemos t = 12, luego para t = 12, $S(12) = 660 - 231(12) + 27(12)^2 - (12)^3 = 48$, es decir **al finalizar la emisión hay 48% de las personas está en audiencia**.
b)
¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?

Sabemos que S(t) es una función continua y derivable en todo R, en particular es continua en $6 \le t \le 12$, y derivable en $6 < t < 12$.
También sabemos que los extremos absolutos de S(t) se encuentran entre las soluciones de B'(t) = 0, y los extremos del intervalo t = 6 y t = 12.

$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \rightarrow S'(t) = -231 + 54t - 3t^2$.

De $S'(t) = 0$, tenemos $-3t^2 + 54t - 231 = 0 \rightarrow t^2 - 18t + 77 = 0 \rightarrow t = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 77}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{16}}{2} =$
$= \frac{18 \pm 4}{2} = 9 \pm 2$, de donde t = 7 y t = 11, que será los posibles extremos relativos.
Evaluamos la función S(t) en los valores 6, 7, 11, 12.
$S(6) = 660 - 231(6) + 27(6)^2 - (6)^3 = 30$
S(7) $= 660 - 231(7) + 27(7)^2 - (7)^3$ **= 23**
S(11) $= 660 - 231(11) + 27(11)^2 - (11)^3$ **= 55**
$S(12) = 660 - 231(12) + 27(12)^2 - (12)^3 = 48$
Vemos que el máximo de audiencia es de 55% de personas y se alcanza a las 11 horas (t = 11); y que el mínimo de audiencia es de 23% de personas y se alcanza a las 7 horas (t = 7).

EJERCICIO 3 (B)

Se elige un número, al azar, entre el siguiente conjunto:
{225, 201, 162, 210, 180, 172, 156, 193, 218, 167, 176, 222, 215, 120, 190, 171}.
a) (0'5 puntos) Calcule la probabilidad de que el número elegido sea impar.
b) (0'75 puntos) Si el número elegido es múltiplo de 5, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 200?
c) (0'75 puntos) Determine si son independientes los sucesos S: "el número elegido es mayor que 200" y T: "el número elegido es par".

d) (0'5 puntos) Halle la probabilidad del suceso $T \cup S$

Solución

Se elige un número, al azar, entre el siguiente conjunto:

{225, 201, 162, 210, 180, 172, 156, 193, 218, 167, 176, 222, 215, 120, 190, 171}.

a)

Calcule la probabilidad de que el número elegido sea impar.

Vemos que hay 16 números de los cuales 6 son impares, luego:

p(número elegido sea impar) = 6/16 **= 3/8 = 0'375.**

b)

Si el número elegido es múltiplo de 5, ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor que 200?

Los múltiplos d 5 son los terminados en 0 o en 5, y que además sean mayores de 200 tenemos 3, luego:

p(número múltiplo de 5 y mayor de 200) = 3/16 = 0'1875.

c)

Determine si son independientes los sucesos S: "el número elegido es mayor que 200" y T: "el número elegido es par".

S y T son independientes si $p(S \cap T) = p(A) \cdot p(B)$.

Como $p(S \cap T)$ = p(nº mayor de 200 y par) = 3/16.

Como p(S) = p(nº mayor de 200) = 6/16.

Como p(T) = p(nº par) = 10/16.

Como $p(S) \cdot p(T)$ = $(3/16) \cdot (10/16) = 15/128 \neq$ **$3/16 = p(S \cap T)$**, **los sucesos S y T no son independientes.**

d)

Halle la probabilidad del suceso $T \cup S$

$p(S \cup T)$ = $p(S) + p(T) - p(S \cap T) = 6/16 + 10/16 - 3/16$ **= 13/16.**

EJERCICIO 4 (B)

1) En un centro docente la tercera parte de los alumnos estudia el idioma A, la mitad el idioma B y el resto el idioma C (cada alumno estudia sólo uno de estos idiomas).

a) (0'75 puntos) Se desea seleccionar una muestra de 60 alumnos, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional al número de los alumnos de cada idioma. ¿Cómo debería estar conformada la muestra?

b) (0'75 puntos) En otra muestra seleccionada por el procedimiento anterior, el número de alumnos tomados del idioma A es 14. Determine cuántos se han elegido de los otros dos idiomas.

2) (1 punto) Una población tiene 5 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias 2 y la media de las medias muestrales 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población?

Solución

1) En un centro docente la tercera parte de los alumnos estudia el idioma A, la mitad el idioma B y el resto el idioma C (cada alumno estudia sólo uno de estos idiomas).

a)

Se desea seleccionar una muestra de 60 alumnos, mediante muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional al número de los alumnos de cada idioma. ¿Cómo debería estar conformada la muestra?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

El idioma A lo estudia 1/3 del total de alumnos N, el idioma B 1/2, y el resto es decir 1 – 1/3 – 1/2 = 1/6, por tanto c como n = 60 y $N_1 = N/3$, $N_2 = N/2$ y $N_3 = N/6$, tenemos:

$$\frac{n}{N} = \frac{60}{N} = \frac{n_1}{N/3} = \frac{n_2}{N/2} = \frac{n_3}{N/6}$$

De $\frac{n_1}{N/3} = \frac{60}{N}$, tenemos $n_1 = \frac{60 \cdot N}{3 \cdot N} = 20$, luego **hay 20 alumnos que estudian el idioma A**.

De $\frac{n_2}{N/2} = \frac{60}{N}$, tenemos $n_2 = \frac{60 \cdot N}{2 \cdot N} = 30$, luego **hay 30 alumnos que estudian el idioma B**.

De $\frac{n_3}{N/6} = \frac{60}{N}$, tenemos $n_3 = \frac{60 \cdot N}{6 \cdot N} = 10$, luego **hay 10 alumnos que estudian el idioma C**.

b)

En otra muestra seleccionada por el procedimiento anterior, el número de alumnos tomados del idioma A es 14. Determine cuántos se han elegido de los otros dos idiomas.

Como el procedimiento es 1/3 del idioma A, 1/2 del idioma B y 1/6 del idioma C. Al elegir 14 alumnos del idioma A, el total de la muestra es $14 \cdot 3 = 42 = n$.

Del idioma B la muestra tiene 42/2 = 21 alumnos y del idioma C hay 42/6 = 7 alumnos.

Resumiendo hay 14 alumnos del idioma A, 21 alumnos del idioma B y 7 alumnos y del idioma C.

2)

Una población tiene 5 elementos. Mediante muestreo aleatorio simple se seleccionan muestras de tamaño 3, siendo la desviación típica de sus medias 2 y la media de las medias muestrales 7. ¿Cuánto valen la media y la varianza de la población?

Supongo que el muestreo es con reemplazamiento, con lo cual podemos aplicar que **la media de la distribución muestral de medias (media de medias) $\overline{x}$ coincide con la media de la población μ,** es decir: $\mu = \overline{x} = 7$.

Análogamente **la desviación típica muestral coincide con la desviación típica poblacional dividida por la raíz cuadrada del tamaño de la muestra** es decir:

$\sigma_X = \sigma/\sqrt{(n)}$.

Como el tamaño de las muestras es n = 3, tenemos que $2 = \sigma/\sqrt{(3)}$, de donde **la desviación típica de la población es $\sigma = 2 \cdot \sqrt{(3)} \cong 3'464102$**.