SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2014 MODELO (COLISIONES)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = (-1 \quad 1)$.

a) (1'25 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que se verifique $(B \cdot A)^t = A \cdot B^t$.
b) (1'25 puntos) Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = (-1 \quad 1)$.

a) (1'25 puntos) Calcule el valor del parámetro a para que se verifique $(B \cdot A)^t = A \cdot B^t$.

De $B \cdot A = (-1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -a+1)$, tenemos $(B \cdot A)^t = \begin{pmatrix} -1 \\ -a+1 \end{pmatrix}$.

$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-1 \quad 1)^t = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Igualando miembro a miembro ambas expresiones tenemos:
-1 = a-1, de donde a = 0.
-a+1 = 1, de donde –a = 0, **por tanto a = 0 para que se verifique $(B \cdot A)^t = A \cdot B^t$.**

b)
Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $X \cdot A = B$.

Para a = 2, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot Adj(A^t)$.

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = (1/|A|) \cdot Adj(A^t) = (1/1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss
A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$(C|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 - 2F_2 \\ \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión $X \cdot A = B$ por la derecha por la matriz inversa A^{-1}, tenemos $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow$
$\rightarrow X \cdot I_2 = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$.

La matriz pedida es $\mathbf{X} = B \cdot A^{-1} = (-1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{(-1 \quad 3)}$.

EJERCICIO 2 (A)

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
a) (1 punto) Estudie la monotonía de f y halle los extremos relativos que posea.
b) (0'75 puntos) Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.
c) (0'75 puntos) Represente la gráfica de la función f.

Solución

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
a)
Estudie la monotonía de f y halle los extremos relativos que posea.

Monotonía. Estudio de la primera derivada f'(x).

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$.
De f'(x) = 0, tenemos $3x^2 - 6x + 3 = 0 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$, de donde x = 1 (doble) será el posible extremo relativo de f.
Como $f'(0) = 3(0)^2 – 6(0) + 3 = 3 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,1)$.

Como $f'(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 3 = 3 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(1,+\infty)$.

Por tanto f es estrictamente creciente en R y no tiene ni máximos ni mínimos relativos

b)

Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.

Curvatura. Estudio de la segunda derivada f''(x).

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$; $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$; $f''(x) = 6x - 6$.

De $f''(x) = 0$, tenemos $6x - 6 = 0$, de donde $x = 1$, que será el posible punto de inflexión.
De $f''(0) = 6(0) - 6 = -6 < 0$, tenemos que f(x) es cóncava ($\cap$) en $(-\infty,1)$.
De $f''(2) = 6(2) - 6 = 6 > 0$, tenemos que g(x) es convexa ($\cup$) en $(1,+\infty)$.
Por definición en x = 1 hay un punto de inflexión, que vale f(1) $= (1)^3 - 3(1)^2 + 3(1)$ **= 1.**

c)

Represente la gráfica de la función f.

Teniendo en cuenta el apartado (a) y (b), calculamos los puntos de corte de f con los ejes, y vemos su comportamiento en ∞.

Cortes:

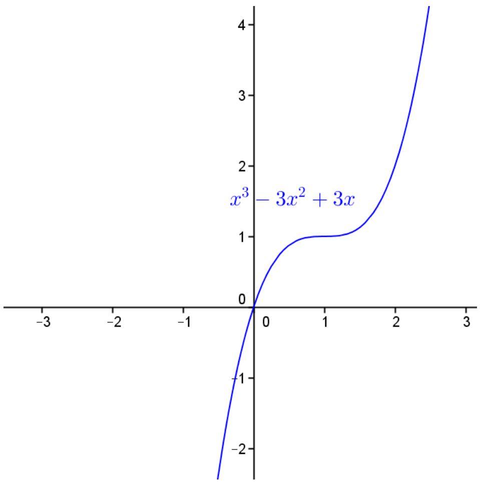
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,0).

De $f(x) = 0$, $x^3 - 3x^2 + 3x = 0 = x(x^2 - 3x + 3)$, de donde $x = 0$ y $x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4(3)}}{2} =$

$= \dfrac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$, que no tiene soluciones reales, luego el único punto de corte es (0,0).

Le damos un par de valores a izquierda y derecha del 0.
Para $x = -1$, $f(1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) = -7$, punto (-1,-7)
Para $x = 2$, $f(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 3(2) = 2$, punto (2,2)
Como $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 3x^2 + 3x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = (-\infty)^3 = -\infty$, en $-\infty$, f vale $-\infty$
Como $\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 3x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = (+\infty)^3 = +\infty$, en $+\infty$, f vale $+\infty$

Un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3 (A)

El 65% de la población española adulta no fuma, el 15% fuma ocasionalmente y el resto fuma habitualmente. Elegidos al azar dos adultos españoles, calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) (1'25 puntos) Los dos sean no fumadores.
b) (1'25 puntos) Uno de ellos sea no fumador y el otro sea fumador ocasional.

Solución

El 65% de la población española adulta no fuma, el 15% fuma ocasionalmente y el resto fuma habitualmente. Elegidos al azar dos adultos españoles, calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

a)

Los dos sean no fumadores.

Llamemos F, Fo y F^C, a los sucesos siguientes, "fuma", "fuma ocasionalmente" y "no fuma", respectivamente. Vemos que los sucesos son independientes.

Me piden **p(dos no fumadores) = p($F^C \cap F^C$)** = p(F^C)$\cdot$ p(F^C) = 0'65$\cdot$0'65 **= 0'4225.**
b)
Uno de ellos sea no fumador y el otro sea fumador ocasional.

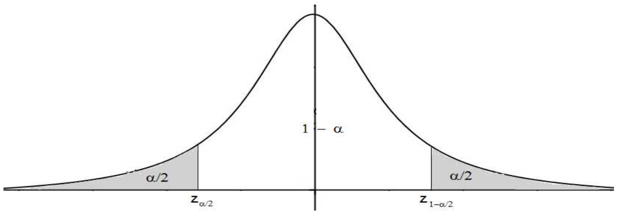
Me piden **p(no fumador y fumador ocasional) = p($F^C \cap$ Fo)** = p(F^C)$\cdot$p(Fo) **=** 0'65$\cdot$0'15 **= 0'0975.**

EJERCICIO 4 (A)

Para estimar la proporción de balances contables incorrectos de un banco, se seleccionan aleatoriamente 200 balances, y se encuentran que 19 de ellos son incorrectos.
a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de balances incorrectos.
b) (1 punto) ¿Cuántos balances se deberán seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, el error de la estimación no sea superior a 0'02?

Solución

Sabemos que para la proporción poblacional **p**, el *estimador* PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$, sigue una $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, y generalmente escribimos $\hat{p} \approx N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ o $\hat{p} \to N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>*proporción*</u> *es* $\hat{p}$ *= (a + b)/2, el* <u>*error máximo*</u> *de la estimación es* $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$*, para el intervalo de la proporción. Pero la amplitud del intervalo es* $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2\cdot E$*, de donde E = (b – a)/2, por tanto el* <u>*tamaño mínimo*</u> *de la muestra es* $n = \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{2\cdot(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{(b-a)^2}$.

Para estimar la proporción de balances contables incorrectos de un banco, se seleccionan aleatoriamente 200 balances, y se encuentran que 19 de ellos son incorrectos.
a)
Obtenga un intervalo de confianza, al 95%, para la proporción de balances incorrectos.

Datos del problema: n = 200, $\hat{p} = \frac{19}{200}$, $\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - \frac{19}{200} = \frac{181}{200}$, nivel de confianza = 95% = 0'95 = = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mathbf{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(\frac{19}{200} - 1'96\cdot\sqrt{\frac{\frac{19}{200}\cdot\frac{181}{200}}{200}}, \frac{19}{200} + 1'96\cdot\sqrt{\frac{\frac{19}{200}\cdot\frac{181}{200}}{200}}\right) \cong$$

$$\cong \mathbf{(0'05362;\ 0'13564)}$$

b)
¿Cuántos balances se deberán seleccionar para que, con un nivel de confianza del 99%, el error de la estimación no sea superior a 0'02?

Datos del problema: $\hat{p} = \frac{19}{200}$, $\hat{q} = \frac{181}{200}$, error = E ≤ 0'02, nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, es decir $\alpha/2$ = 0'01/2 = 0'005.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'995 no viene, las más próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ es la media es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos $n \ge \frac{(z_{1-\alpha/2})^2\cdot\hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(2'575)^2\cdot\frac{19}{200}\cdot\frac{181}{200}}{(0'02)^2}$ = 1425'2, por tanto **el tamaño mínimo de balances que hay que seleccionar es n = 1426.**

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

a) (1 punto) Represente la región del plano determinada por las siguientes inecuaciones: 2x + 5y ≤ 15; x + y ≤ 6; 5x – 7y ≤ 42; x ≥ 0.
b) (1 punto) Halle los vértices de la región anterior.
b) (0'5 puntos) En esta región, halle el valor mínimo de la función F(x,y) = -2x - 2y + 3 y donde lo alcanza.

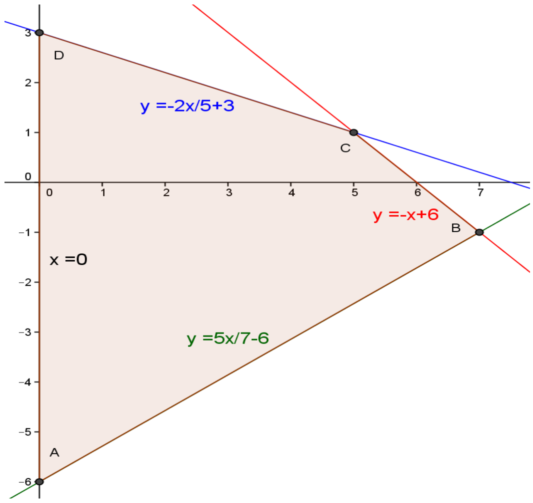
Solución

a) b) y c)
Dadas las inecuaciones: 2x + 5y ≤ 15; x + y ≤ 6; 5x – 7y ≤ 42; x ≥ 0, represente el recinto que limitan y calcule sus vértices. Halle los vértices de la región anterior. En esta región, halle el valor mínimo de la función F(x,y) = -2x - -2y + 3 y donde lo alcanza.

Las desigualdades 2x + 5y ≤ 15; x + y ≤ 6; 5x – 7y ≤ 42; x ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, 2x + 5y = 15; x + y = 6; 5x – 7y = 42; x = 0
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

y = -2x/5 + 3; y = -x + 6; y = 5x/7 - 6; x = 0

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De x = 0 e y = 5x/7-6, tenemos y = -6 y el vértice es A(0,-6).
De y = 5x/7-6 e y = -x + 6, tenemos 5x/7-6 = -x + 6 → 5x-42 = -7x+42 → 12x = 84, es decir x = 7 e y = -1, y el vértice es B(-1,7).
De y = -x+6 e y = -2x/5+3, tenemos -x+6 = -2x/5+3 → -5x+30 = -2x+15 → 15 = 3x, de donde x = 5 e y = 1, y el vértice es C(5,1).
De x = 0 e y = -2x/5+3, tenemos y = 3, y el vértice es D(0,3).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto son: A(0,-6), B(-1,7), C(5,1) y D(0,3).
Veamos el mínimo de función F(x,y) = -2x - 2y + 3 en el recinto anterior, así como el punto donde lo alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,-6), B(-1,7), C(5,1) y D(0,3). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,6) = -2(0) - 2(-6) + 3 = 15; **F(-1,7)** = -2(-1) - 2(7) + 3 **= -9**;
F(5,1) = -2(5) - 2(1) + 3 **= -9**; F(0,3) = -2(0) - 2(-3) + 3 = -3.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función f en la región es -9** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en los vértices B(-1,7) y C(5,1) por tanto se alcanza en todo el segmento BC.**

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) (1'5 puntos) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio
b) (0'5 puntos) Determine sus asíntotas, en caso de que existan.
c) (0'5 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a)
Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio

La función $(x + 1)^2$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en el intervalo $(-\infty,1)$.
La función $\dfrac{4}{x}$ es una función racional, por tanto continua y derivable en todo R – {0} (número que anula el denominador), en particular en el intervalo $(1,+\infty)$.
Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 1.

f(x) es continua en x = 1 si $f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x)$.
$f(1) = \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} (x+1)^2 = (2)^2 = 4$;

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \dfrac{4}{x} = \dfrac{4}{1} = 4$, como son iguales **f es continua en x = 1, es decir f es continua en R.**

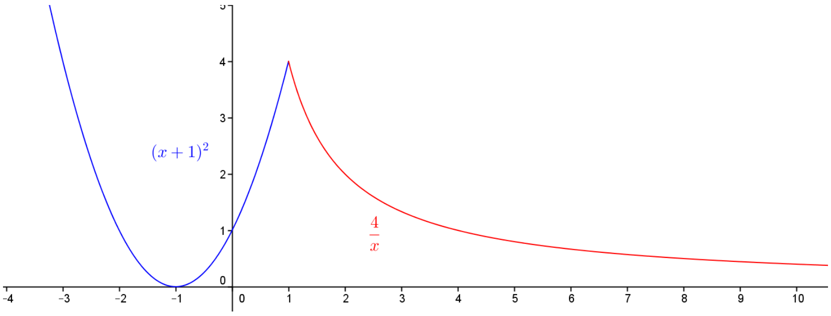
$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{4}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$; tenemos $f'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-4}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 1 si $\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} 2\cdot(x+1) = 2\cdot(2) = 4$; $\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \dfrac{-4}{x^2} = \dfrac{-60}{(1)^2} = -4$, como son iguales tenemos **que f no es derivable en x = 1, luego f es derivable en R – {1}**
b)
Determine sus asíntotas, en caso de que existan.

La rama $(x + 1)^2$ es una función polinómica, que sabemos no tiene asíntotas.
La rama de 4/x es un trozo hipérbola, que tiene una asíntota vertical en x = 0 (número que anula el denominador, pero no está en su dominio) porque $\lim_{x\to0^-} 60/x = 60/0^- = -\infty$, y una asíntota horizontal en y = 0 en $+\infty$, porque $\lim_{x\to+\infty} 4/x = 4/(+\infty) = 0^+$, y f está por encima de la asíntota.

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica de f es:



c)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

El punto x = 2 está en la rama f(x) = 4/x.
La recta tangente en x = 2 es y – f(2) = f'(2)·(x – 2).
De f(x) = 4/x, tenemos f(2) = 4/2 = 2.
De f'(x) = $-4/x^2$, tenemos f'(2) = $-4/(2)^2$.= -1.
A recta tangente pedida es y – 2 = (-1)·(x – 2), de donde y = -x + 4.

EJERCICIO 3 (B)

Se sabe que el 80% de los visitantes de un determinado museo son andaluces y que el 55% son andaluces y adultos. Además, el 17% de los visitantes no son andaluces y adultos. Se elige, al azar, un visitante del museo:
a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea adulto?
b) (1 punto) Si es adulto, ¿cuál es la probabilidad de que sea andaluz?

Solución

Se sabe que el 80% de los visitantes de un determinado museo son andaluces y que el 55% son andaluces y adultos. Además, el 17% de los visitantes no son andaluces y adultos. Se elige, al azar, un visitante del museo:
a)
¿Cuál es la probabilidad de que no sea adulto?

Llamamos A y B a los sucesos "ser andaluz" y "ser adulto".
Del problema tenemos:
El 80% de los visitantes de un determinado museo son andaluces → p(A) = 80% = 0'8.,
El 55% son andaluces y adultos → $p(A\cap B)$ = 55% = 0'55.
El 17% de los visitantes no son andaluces y adultos → $p(A^C\cap B)$ = 17% = 0'17.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **p(no sea adulto) = $p(B^C)$**
De $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$, tenemos 0'17 = $p(B\cap A^C)$ = p(B) - $p(A\cap B)$ = p(B) – 0'55, por tanto
p(B) = 0'17 + 0'55 = 0'72, por tanto **$p(B^C)$** = 1 - p(B) = 1- 0'72 **= 0'28.**
b)
Si es adulto, ¿cuál es la probabilidad de que sea andaluz?

Me piden **p(Si es adulto, sea andaluz) = p(A/B)**

Luego **p(A/B)** = $\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ **= 0'55/0'72 ≅ 0'763889**.

EJERCICIO 4 (B)

a) (1'5 puntos) Determine todas las muestras de tamaño 2 que, mediante un muestreo aleatorio simple, se pueden extraer del conjunto {6,9,12} y calcule la varianza de las medias muestrales.
b) (1 punto) Una empresa fabrica cuatro productos A, B, C y D, de los que elabora diariamente 40, 15, 25 y 120 unidades respectivamente.
Si un día se quiere elaborar un muestra de 40 unidades con los productos fabricados, por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de unidades de cada producto se debe elegir?

Solución

a)
Determine todas las muestras de tamaño 2 que, mediante un muestreo aleatorio simple, se pueden extraer del conjunto {6,9,12} y calcule la varianza de las medias muestrales.

Supongo que el muestreo es con reemplazamiento. Hay 9 muestra con reemplazamiento de tamaño 2. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

MUESTRAS									
Elementos	6 6	6 9	6 12	9 6	9 9	9 12	12 6	12 9	12 12
Media de la muestra $\bar{x}_i$	6	7'5	9	7'5	9	10'5	9	10'5	12

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
6	1	6	36
7'5	2	15	112'5
9	3	27	243
10'5	2	21	220'5
12	1	12	144
Σ	**N =9**	**81**	**756**

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{81}{9}$ **= 4.**

La desviación varianza de la distribución muestral de medias es: $\boldsymbol{\sigma_X^2 =} \frac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{756}{9} - (9)^2 \boldsymbol{= 3.}$

b)
Una empresa fabrica cuatro productos A, B, C y D, de los que elabora diariamente 40, 15, 25 y 120 unidades respectivamente.
Si un día se quiere elaborar un muestra de 40 unidades con los productos fabricados, por muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, ¿qué número de unidades de cada producto se debe elegir?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay “k” estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1, N_2, ..., N_k$, y si $n_1, n_2, ..., n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números $n_1, n_2, ..., n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1, N_2, ..., N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = ... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{40} = \frac{n_2}{15} = \frac{n_3}{25} = \frac{n_4}{120} = \frac{n}{N} = \frac{40}{40+15+25+120} = \frac{40}{200}$

De $\frac{n_1}{40} = \frac{40}{200}$, tenemos $n_1 = \frac{40\cdot 40}{200} = 30$, luego **hay 8 unidades de A**.

De $\frac{n_2}{15} = \frac{40}{200}$, tenemos $n_2 = \frac{15\cdot 40}{200} = 8$, luego **hay 3 unidades de B**.

De $\frac{n_3}{25} = \frac{40}{200}$, tenemos $n_3 = \frac{25\cdot 40}{200} = 24$, luego **hay 5 unidades de C**.

De $\frac{n_4}{120} = \frac{40}{200}$, tenemos $n_4 = \frac{120\cdot 40}{200} = 24$, luego **hay 24 unidades de D.**