SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS JUNIO 2014 MODELO (COMÚN)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a) (1 punto) Obtenga la matriz A^{2014}.
b) (1'5 puntos) Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.

a)
Obtenga la matriz A^{2014}.

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Siguiendo este proceso observamos que $A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 2014a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, aunque para demostrarlo correctamente tendríamos que utilizar el método de inducción.

b)
Para a = 2, resuelva la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

Para a = 2, tenemos $A^3 = C = \begin{pmatrix} 1 & 3(2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\det(C) = |C| = |A^3| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$, existe la matriz inversa $C^{-1} = (1/|C|) \cdot Adj(C^t)$.

$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$; $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, luego $C^{-1} = (1/|C|) \cdot Adj(C^t) = (1/1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss
C tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(C|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = C^{-1}$.

$(C|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} F_1 - 6F_2 \\ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ por tanto $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De $A^3 \cdot X - 4B = O$, tenemos $C \cdot X = 4B$. Multiplicando la expresión $C \cdot X = 4B$ por la izquierda por la matriz inversa C^{-1}, tenemos $C^{-1} \cdot C \cdot X = C^{-1} \cdot 4B \rightarrow I_2 \cdot X = 4 \cdot C^{-1} \cdot B \rightarrow X = 4 \cdot C^{-1} \cdot B$.

La matriz pedida es $\mathbf{X} = 4 \cdot C^{-1} \cdot B = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2 (A)

La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138$, $x \geq 0$.

a) (1 punto) Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.
b) (0'5 puntos) Calcule f'(7) e interprete el signo del resultado.
c) (1 punto) Dibuje la función de beneficios f(x). ¿Para qué valor o valores de la inversión, x, el beneficio es de 138 mil euros?

Solución

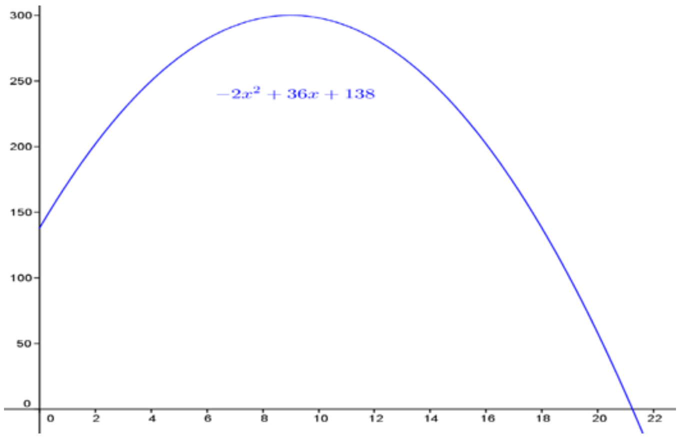
(a) y parte de c)
La función de beneficios f, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida x, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por $f(x) = -2x^2 + 36x + 138$, $x \geq 0$.

a)
Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo. Dibuje la función de beneficios $f(x) = -2x^2 + 36x + 138$, $x \geq 0$.

La gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + 36x + 138$, $x \geq 0$, es un trozo de parábola que tiene las ramas hacia abajo ($\cap$), por que el número que multiplica a x^2 es negativo.
Su vértice, que en este caso es el máximo relativo y absoluto, tiene la abscisa en la solución de la ecuación $f'(x) = (-2x^2 + 36x + 138)' = 0 = -4x + 36$, de donde $x = 9$ y el vértice es $V(9,f(9)) = V(9,300)$.
$f(9) = -2(9)^2 + 36(9) + 138 = 300$.
Como el vértice V(9,300) es el máximo, **la inversión que maximiza el beneficio de la empresa es x = 9 mil €, y dicho beneficio óptimo es f(9) = 300 mil €.**

Tenemos de $f(0) = -2(0)^2 + 36(0) + 138 = 138$, el punto (0,138)
Tenemos de $f(20) = -2(20)^2 + 36(20) + 138 = 58$, el punto (20,58)

Un esbozo de la gráfica de la parábola, con los tres puntos anteriores incluyendo el vértice es:



b)
Calcule f'(7) e interprete el signo del resultado.

Mirando la gráfica vemos que en x = 7 la función es estrictamente creciente, por tanto veremos que f'(7) es positivo, porque f'(7), por la interpretación geométrica de la derivada en un punto, es la pendiente de la recta tangente en x = 7, y al ser positivo la pendiente es positiva y la función beneficio es estrictamente creciente en dicho punto x = 7.
Veamos ya que $f'(7) > 0$
$f'(7) = -4(7) + 36 = 8 > 0$.
c)
Dibuje la función de beneficios f(x). ¿Para qué valor o valores de la inversión, x, el beneficio es de 138 mil euros?

Mirando a la gráfica vemos que hay dos valores de x para los cuales el beneficio es de 138 mil €, pues la gráfica es simétrica respecto a su vértice y en él la ordenada es de 300 mil €.

Lo que piden es que resolvamos $f(x) = 138$.
De $f(x) = 138$, tenemos $-2x^2 + 36x + 138 = 138$, luego $-2x^2 + 36x = x(-2x + 36) = 0$, de donde tenemos las soluciones $x = 0$ y $x = 18$, es decir **se obtiene un beneficio de 138 mil € con una inversión de 0 mil €** (se puede descartar, aunque sirva matemáticamente) **y con una inversión de 18 mil €.**

EJERCICIO 3 (A)

Una urna, A, contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Otra urna, B, contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que si sale cara, extraemos una bola de la urna A, y, si sale cruz, la extraemos de la urna B.
Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
a) (0'5 puntos) "La bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par".
b) (1 punto) "El número de la bola extraída sea par".
c) (1 punto) "La bola sea de la urna A, si ha salido un número par".

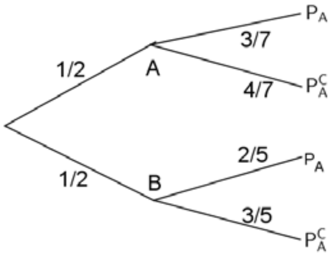
Solución

Una urna, A, contiene siete bolas numeradas del 1 al 7. Otra urna, B, contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5. Lanzamos una moneda equilibrada, de forma que si sale cara, extraemos una bola de la urna A, y, si sale cruz, la extraemos de la urna B.
Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:
a)

"La bola haya sido extraída de la urna A y el número sea par".

Llamemos A, B, P^A y P^B, a los sucesos siguientes, "sacar una bola de la urna A", " sacar una bola de la urna B", " sacar una bola par de la urna A " y " sacar una bola par de la urna B ", respectivamente.
Datos del problema p(A) = p(B) = 1/2; $p(P^A/A) = 3/7$; $p(P^A/B) = 2/5$,….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



Me piden **p(urna A y bola par) = $p(A \cap P_A)$** = $p(A)\cdot p(P_A/A)$ = (1/2)·(3/7) **= 3/14 ≅ 0'2143.**
b)
"El número de la bola extraída sea par".

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída sea roja (R) es:

P(bola par) = p(P) = $p(A).p(P_A/A) + p(B).p(P_B/B)$ = (1/3)·(3/7) + (1/2)·(2/5) **= 29/70 ≅ 0'4143**.
c)
"La bola sea de la urna A, si ha salido un número par".

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

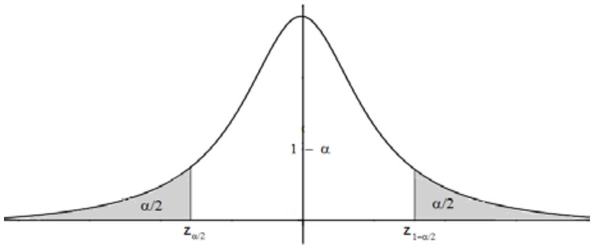
$$\textbf{p(A/P) =} \frac{p(A \cap P)}{p(P)} = \frac{p(A).p(P_A/A)}{p(P)} = \frac{(1/2)\cdot(3/7)}{29/70} \ \textbf{= (15/29)} \cong \textbf{0'517}.$$

EJERCICIO 4 (A)

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros, encontrando que tienen un precio medio de 23 €. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 5 €.
a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza, al 98'8%, para el precio medio de esos libros.
b) (1 punto) ¿Cuántos libros habría que elegir como muestra para que, con la misma confianza, el error máximo de la estimación no excediera de 1 €?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de* *donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros, encontrando que tienen un precio medio de 23 €. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución Normal con media desconocida y desviación típica 5 €.
a)
Obtenga un intervalo de confianza, al 98'8%, para el precio medio de esos libros.

Datos del problema: n = 121; $\overline{x}$ = 23; σ = 5; nivel de confianza = 98'8% = 0'988 = 1 - α, de donde α = 0'012, con la cual $\alpha/2$ = 0'012/2 = 0'006.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'006 = 0'994, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'994 vemos que viene, y corresponden a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'51, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C.(μ) = $\left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(23-2'51\cdot\frac{5}{\sqrt{121}},23+2'51\cdot\frac{5}{\sqrt{121}}\right) \cong$ **(21'8591,24'14091)**

b)
¿Cuántos libros habría que elegir como muestra para que, con la misma confianza, el error máximo de la estimación no excediera de 1 €?

Datos del problema: Error = E = 1, σ = 5, igual nivel de confianza = 98'8% nos da $z_{1-\alpha/2}$ = 2'51.

De E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos n ≥ $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'51\cdot 5}{1}\right)^2$ = 157'5025, es decir **el tamaño mínimo de la muestra de libros es de n = 158 libros.**

OPCION B

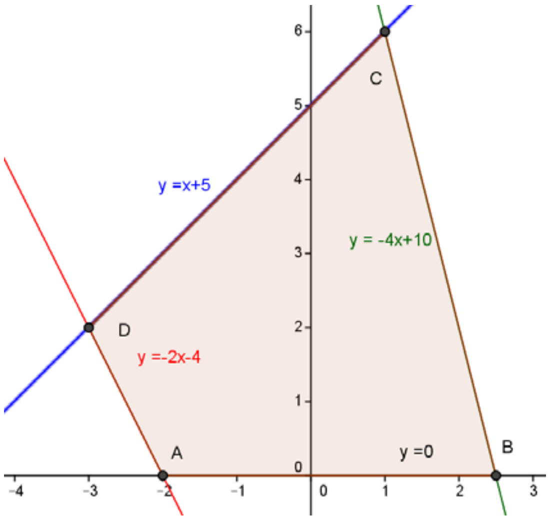
EJERCICIO 1 (B)

a) (1'8 puntos) Dadas las inecuaciones: y ≤ x + 5; 2x + y ≥ -4; 4x ≤ 10 - y; y ≥ 0, represente el recinto que limitan y calcule sus vértices.
b) (0'7 puntos) Obtenga el máximo y el mínimo de función f(x,y) = x + y/2 en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

Solución

a)
Dadas las inecuaciones: y ≤ x + 5; 2x + y ≥ -4; 4x ≤ 10 - y; y ≥ 0, represente el recinto que limitan y calcule sus vértices.

Las desigualdades y ≤ x + 5; 2x + y ≥ -4; 4x ≤ 10 - y; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, y = x + 5; 2x + y = -4; 4x = 10 - y; y = 0
Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = x + 5; y = -2x - 4; y = -4x + 10; y = 0
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $y = -2x-4$ e $y = 0$, tenemos $-2x-4 = 0$, luego $x = -2$ y el vértice es A(-2,0).
De $y = 0$ e $y = -4x + 10$, tenemos $0 = -4x + 10 \to x = 10/4 = 2'5$, y el vértice es B(2'5,0).
De $y = -4x+10$ e $y = x + 5$, tenemos $-4x+10 = x + 5 \to 5 = 5x \to x = 1$, de donde $y = 6$, y el vértice es C(1,6).
De $y =x +5$ e $y = -2x-4$, tenemos $x+5 = -2x-4 \to 3x = -9 \to x = -3$, de donde $y = 2$ y el vértice es D(-3,2).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto son: A(-2,0), B(2'5,0), C(1,6) y D(-3,2).

b)
Obtenga el máximo y el mínimo de función $f(x,y) = x + y/2$ en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos f en los puntos anteriores A(-2,0), B(2'5,0), C(1,6) y D(-3,2). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

f(2,0) = (-2) + (0)/2 **= -2**; f(2'5,0) = (2'5) + (0)/2 = 2'5;
f(1,6) = (1) + (6)/2 = **4**; **f(-3,2)** = (-3) + (2)/2 **= -2**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función f en la región es 4** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(1,6) y el mínimo absoluto de la función f en la región es -2** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en los vértices A(2,0) y D(-3,2) por tanto se alcanza en todo el segmento AD.**

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.
b) (1 punto) Para a = 48 y b = 3, estudie la monotonía de f(x) y calcule sus extremos.

Solución

Sea la función f definida por $f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a)
Obtenga los valores de a y b para que la función sea continua y derivable.

La función $-bx^2 - bx + a$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R, en particular en $(-\infty,2)$.
La función $\dfrac{60}{x}$ es una función racional, por tanto continua y derivable en todo R – {0} (número que anula el denominador), en particular en $(2,+\infty)$.
Veamos la continuidad y la derivabilidad de f en x = 2.

f(x) es continua en x = 2 si $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.
$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (-bx^2 - bx + a) = -b(2)^2 - b(2) + a = -6b + a$;

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{60}{x} = \dfrac{60}{2} = 30$, como son iguales tenemos **-6b + a = 30.**

$f(x) = \begin{cases} -bx^2 - bx + a & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$; tenemos $f'(x) = \begin{cases} -2bx - b & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{-60}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

f(x) es derivable en x = 2 si $\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^+} f'(x)$, estamos viendo la continuidad de la derivada.

$\lim_{x\to 2-} f'(x) = \lim_{x\to 2-} (-2bx-b) = -2b(2)-b = -5b$; $\lim_{x\to 2+} f'(x) = \lim_{x\to 2+} \dfrac{-60}{x^2} = \dfrac{-60}{(2)^2} = -15.$, como son iguales tenemos **-5b = -15,** de donde **b = 3.**

De -6(3) + a = 30, tenemos **a = 48.**

La función f es continua y derivable para a = 48 y b = 3.

b)

Para a = 48 y b = 3, estudie la monotonía de f(x) y calcule sus extremos.

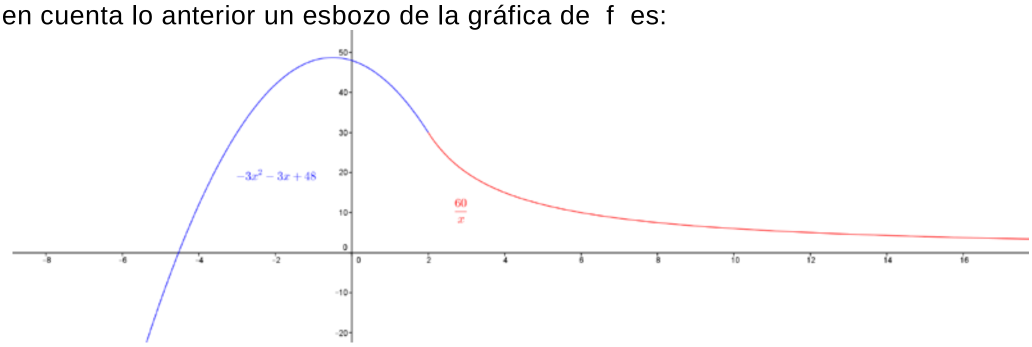
Nuestra función es $f(x) = \begin{cases} -3x^2 - 3x + 48 & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{60}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$, y ya hemos visto en el apartado (a) que es continua y derivable en todo R.

Vamos a dibujar la gráfica y después diremos su monotonía y extremos.

La gráfica de $-3x^2 - 3x + 48$ es un trozo de parábola, con las ramas hacia abajo $\cap$ (el nº que multiplica a x^2 es negativo), con vértice V de abscisa la solución de f'(x) = 0 = -6x-3, de donde x = -1/2 y V(-1/2,f(-1/2)) = (-1/2,48'75), y pasa por los puntos (-2,42) y (2,30).

La gráfica de 60/x es un trozo hipérbola, que tiene una asíntota vertical en x = 0 (no está en su dominio) porque $\lim_{x\to 0-} 60/x = 60/0^- = -\infty$, y una asíntota horizontal en y = 0 en $+\infty$, porque $\lim_{x\to +\infty} 60/x = 60/(+\infty) = 0^+$, y f está por encima de la asíntota. Además f(2) = 60/2 = 30, es decir pasa por el punto (2,30) y siempre es estrictamente decreciente porque va de la ordenada y = 30 en x = 2, hasta la asíntota y = 0 en $+\infty$.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



Observando la gráfica vemos que f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-1/2)$ (hasta la abscisa del vértice de la parábola).

Análogamente vemos que f es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(-1/2,+\infty)$ (desde la abscisa del vértice de la parábola).

Por definición en x = -1/2 hay un máximo relativo y absoluto que vale f(-1/2) = 48'75.

EJERCICIO 3 (B) Resuelto por D. Marcelo Rodríguez Vázquez Profesor de Matemáticas del IES El Majurelo, Gines (Sevilla).

Antonio va de compras dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va de compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

a) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruto esté de oferta.

Solución

Antonio va de compras dos días de cada cinco. A lo largo del tiempo, ha observado que la fruta está de oferta la tercera parte de los días que va de compra y la mitad de los días que no va. Elegido un día al azar:

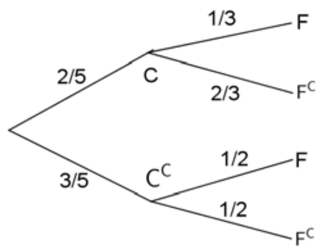
a)

¿Cuál es la probabilidad de que la fruta esté de oferta ese día?

Llamemos C, C^C, F y F^C, a los sucesos siguientes, "ir a la compra", "no ir a la compra", "fruta de oferta" y "fruta sin oferta ", respectivamente.

Datos del problema p(C) = 2/5; p(F/C) = 1/3 ; p(F/C^C) = 1/2, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la fruta este de oferta es:

p(F) = p(C).p(F/C) + p(C^C).p(F/C^C) = (2/5)·(1/3) + (3/5)·(1/2) **= 13/30 ≅ 0'4333**.

b)

Calcule la probabilidad de que ese día Antonio vaya a la compra o la fruta esté de oferta.

Recordamos que p(A o B) = p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B); p(A∩B) = p(A)·p(B/A).

Me piden **p(vaya a la compra o la fruta esté de oferta) = p(C o F) = p(C∪F) =**

= p(C) + p(F) - p(C∩F) = p(C) + p(F) – p(C)·p(F/C) = 2/5 + 13/30 – (2/5)·(1/3) **= 7/10 = 0'7.**

EJERCICIO 4 (B)

(2'5 puntos) Un titular de prensa afirma que el 70% de los jóvenes de una ciudad utilizan las redes sociales para comunicarse.

Para contrastar la veracidad de tal afirmación se toma una muestra aleatoria de 500 jóvenes de esa ciudad, y se obtiene que 340 de ellos utilizan la red para comunicarse.

Analice mediante un contraste de hipótesis bilateral, (H_0 : p = 0'7), si se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, que dicha afirmación es cierta.

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:* $N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}\right)$.

Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Nos dice el problema Un titular de prensa afirma que el 70% de los jóvenes de una ciudad utilizan las redes sociales para comunicarse.

Para contrastar la veracidad de tal afirmación se toma una muestra aleatoria de 500 jóvenes de esa ciudad, y se obtiene que 340 de ellos utilizan la red para comunicarse.

Analice mediante un contraste de hipótesis bilateral, (H_0 : p = 0'7), si se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, que dicha afirmación es cierta. *Es un contraste bilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

Datos del problema: p_0 = 0'7; q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0'7 = 0'3; n = 500; $\hat{p}$ = 340/500 = 0'68; nivel significación = α = = 1% = 0,01

El problema la dividimos en cinco etapas

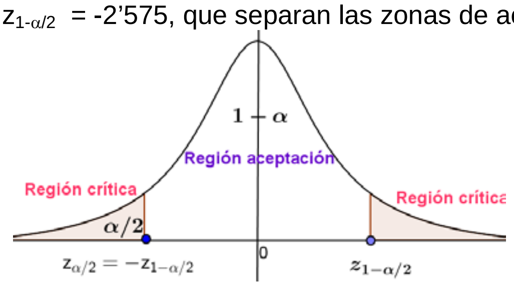
<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: p_0 = 0'70 (ya nos la dá el problema) y H_1: $p_0 \neq$ 0'70.

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

La prueba es bilateral y para un nivel de significación α = 0'01, con lo cual α/2 = 0,01/2 = 0'005.

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 – 0'005 = 0'995, mirando en las tablas de la N(0,1) observamos que no viene dicha probabilidad, y que las probabilidades mas próximas son 0'9949 y 0'9951 que corresponden a 2'57 y 2'58, por tanto tomamos la media, es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575, con lo cual tenemos por **valores críticos** $z_{1-\alpha/2}$ = 2'575 y $z_{\alpha/2}$ = - $z_{1-\alpha/2}$ = -2'575, que separan las zonas de aceptación y de rechazo.



Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \dfrac{0'68 - 0'7}{\sqrt{\dfrac{0'7 \cdot 0'3}{500}}} \cong -0'3086$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -0'3086$ **está entre** $z_{\alpha/2} = -2'575$ **y** $z_{1-\alpha/2} = 2'575$, vemos que se encuentra en la zona de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar la hipótesis nula** H_0: $p_0 = 0'7$ con un nivel de significación del 1%.

En consecuencia, **aceptamos que los jóvenes de esa ciudad utilizan las redes sociales para comunicarse con un nivel de significación del 1%**.