SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2014 MODELO 5

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a) (0'5 puntos) Efectúe la operación $A\cdot B^t$.
b) (0'75 puntos) Determine la matriz X tal que $A + 2\cdot X = B$.
c) (1'25 puntos) Calcule la matriz Y, sabiendo que $B\cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Solución

Se consideran las matrices A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

a)
Efectúe la operación $A\cdot B^t$.

$$\mathbf{A\cdot B^t =} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}.$$

b)
Determine la matriz X tal que $A + 2\cdot X = B$.

De $A + 2\cdot X = B \rightarrow 2\cdot X = B - A \rightarrow \mathbf{X =} (1/2)\cdot(B - A) = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c)
Calcule la matriz Y, sabiendo que $B\cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Como $\det(B) = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 2 = 14 \neq 0$, existe la matriz inversa $B^{-1} = (1/|B|)\cdot Adj(B^t)$.

$B^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, luego $B^{-1} = (1/|B|)\cdot Adj(B^t) = (1/14)\cdot\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss
A tiene inversa, si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(B|I_2)$, a la expresión $(I_2|B^{-1})$.

$$(B|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix}\text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2\end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) F_2 - 3\cdot F_1 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -14 & 1 & -3 \end{array}\right) F_2:(-14) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/14 & 3/14 \end{array}\right) F_1 - 4\cdot F_2 \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/14 & 1/7 \\ 0 & 1 & -1/14 & 3/14 \end{array}\right) \text{ por tanto } B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la expresión que $B\cdot Y = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ por la izquierda por la matriz inversa B^{-1}, tenemos

$$B^{-1}\cdot B\cdot Y = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow I_2\cdot Y = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow Y = B^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/14 & 3/14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

La matriz pedida es $\mathbf{Y =} \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2 (A)

(2'5 puntos) Sean las funciones $f(x) = (2x^2 - 1)^3\cdot\ln(x^4)$ y $g(x) = \dfrac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$
Determine el valor de $f'(-1)$ y $g'(0)$.

Sean las funciones $f(x) = (2x^2 - 1)^3\cdot\ln(x^4)$ y $g(x) = \dfrac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$. Determine el valor de $f'(-1)$ y $g'(0)$.

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$;

$((f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$; $(e^{kx})' = k.e^{kx}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$; $(k)' = 0$.

$f(x) = (2x^2 - 1)^3\cdot \ln(x^4)$

$f'(x) = 3\cdot(2x^2 - 1)^2\cdot(4x)\cdot\ln(x^4) + (2x^2 - 1)^3\cdot\dfrac{4x^3}{x^4}$

$\mathbf{f'(-1)} = 3\cdot(2(-1)^2 - 1)^2\cdot(4(-1))\cdot\ln((-1)^4) + (2(-1)^2 - 1)^3\cdot\dfrac{4(-1)^3}{(-1)^4} = 3\cdot(1)^2\cdot(-4)\cdot\ln(1) + (1)^3\cdot\dfrac{4(-1)}{1} = 0 - 4 \mathbf{= -4.}$

$g(x) = \dfrac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$.

$g'(x) = \dfrac{[e^{-2x+x^2}\cdot(-2+2x)].(x^2+1) - e^{-2x+x^2}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$\mathbf{g'(0)} = \dfrac{[e^0\cdot(-2)]\cdot(+1) - 0}{(1)^2} \mathbf{= -2.}$

EJERCICIO 3 (A)

En un Instituto de Educación Secundaria el 40% de los alumnos juegan al fútbol, el 30% juegan al baloncesto y el 20% practican ambos deportes.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno, elegido al azar, no practique ninguno de los dos deportes?

b) (0'75 puntos) Si un alumno, elegido al azar, juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue al baloncesto?

c) (0'75 puntos) ¿Son independientes los sucesos "jugar al fútbol" y "jugar al baloncesto"?

Solución

En un Instituto de Educación Secundaria el 40% de los alumnos juegan al fútbol, el 30% juegan al baloncesto y el 20% practican ambos deportes.

a)

¿Cuál es la probabilidad de que un alumno, elegido al azar, no practique ninguno de los dos deportes?

Llamamos A y B a los sucesos "juegan al fútbol" y "juegan al baloncesto".

Del problema tenemos: $p(A) = 40\% = 0'4$, $p(B) = 30\% = 0'3$ y $p(A\cap B) = 20\% = 0'2$.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **p(no practique ninguno de los dos deportes) = p(noA y noB) = $\mathbf{p(A^C\cap B^C)}$ =** {Ley de Morgan} =

= $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$ **= $1 - 0'5$ **= 0'5.**

**$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B) = 0'4 + 0'3 - 0'2 = 0'5$

b)

Si un alumno, elegido al azar, juega al fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que no juegue al baloncesto?

Me piden **p(no juegue al baloncesto, sabiendo que juega al futbol) = $\mathbf{p(B^C/A)}$**

Luego $\mathbf{p(B^C/A)} = \dfrac{p(B^C\cap A)}{p(A)} = \dfrac{p(A) - p(B\cap A)}{p(A)}$ = (0'4 - 0'2)/(0'4) **= 0'5**.

c)

¿Son independientes los sucesos "jugar al fútbol" y "jugar al baloncesto"?

A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$.

Como **$p(A\cap B) = 0'2 \neq p(A)\cdot p(B)$** = 0'4·0'3 = 0'12, **los sucesos A y B no son independientes.**

EJERCICIO 4 (A)

Los responsables de tráfico de una ciudad trabajan con la hipótesis de que, al menos, el 65% de sus habitantes son favorables a la creación de una red de carril-bici en esa ciudad.

Encuestados 950 habitantes, elegidos al azar, 590 están a favor de tal medida
a) (1'5 puntos) Mediante un contraste de hipótesis, (H_0 : p ≥ 0'65), con un nivel de significación del 10%, ¿se puede decir que tienen razón los responsables de tráfico de esa ciudad?
b) (1 punto) ¿Se concluiría lo mismo si el nivel de significación fuera del 1%?

Solución

Sabemos que *la distribución muestral de proporciones sigue también una distribución normal:*
$N\left(\hat{p}, \sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}\right)$.
Trabajaremos con lo normal N(0,1)

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Nos dice el problema que la hipótesis nula es $H_0 : p_0 \geq 0'65$ (lo dá el problema), con un nivel de significación de α = 10% = 0,1. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

También se puede hacer con la normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

Datos del problema: $p_0 = 0'65$; n = 950; $\hat{p}$ = 590/950 = 59/95 ≅ 0'621; región crítica = α = 0,1 = 10%.

El problema la dividimos en cinco etapas

Etapa 1: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

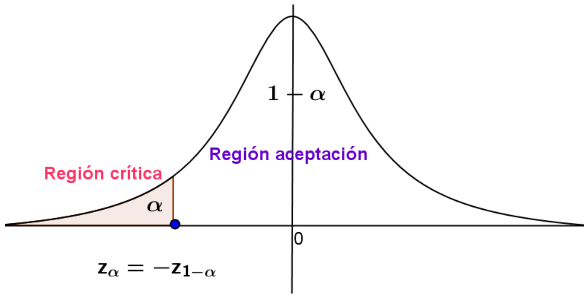
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \geq 0'65$ y $H_1 : p_0 < 0'65$, la cual *nos indica la dirección del contraste, es decir la región crítica está a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: Calculamos el punto o puntos críticos, que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'1, luego tenemos 1 - α = 0'9.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'1 = 0'9$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'8997, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 1'28 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



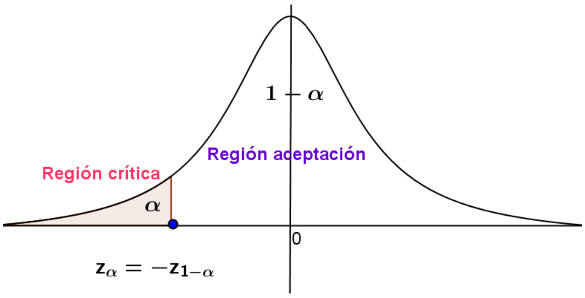
Etapas 3 y 4: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} = \frac{59/95 - 0'65}{\sqrt{\frac{0'65 \cdot 0'35}{950}}} \cong -1'87059$.

Etapa 5: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -1'87059 está en la región de rechazo para el punto crítico $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$ = - 1'28, pues -1'87059 < -1'28, **rechazamos la hipótesis nula H_0: H_0: $p_0 \geq 0'65$, y aceptamos la hipótesis alternativa H_1 : $p_0 < 0'65$, con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 10%, afirmamos que menos del 65% no desean el carril bici.**

b)
¿Se concluiría lo mismo si el nivel de significación fuera del 1%?

Todo es exactamente igual, lo único que varía es el punto crítico que nos delimitará la región de aceptación de la de rechazo.



Para el nivel de significación es α = 1% = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0'99.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = <u>- 2'33</u> que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -1'87059 está en la región de aceptación para el punto crítico $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 2'33, pues -2'33 < -1'87059, **aceptamos la hipótesis nula H_0: H_0: $p_0 \ge 0'65$, con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 1%, afirmamos que <u>mas del 65%</u> desean el carril bici.**

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

a) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X = 2\cdot(C - D^t)$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\quad y\quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) (1 punto) Si A(0, 2), B(2, 0), C(4, 0), D(6, 3) y E(3,6) son los vértices de una región factible, determine, en esa región, el valor mínimo y el valor máximo de la función $F(x,y) = 4x - 3y + 8$ e indique los puntos donde se alcanzan.

Solución

a)
Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X = 2\cdot(C - D^t)$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\quad y\quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos $A\cdot X = 2\cdot(C - D^t)$,

Como $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \ne 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t)$.

$A^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, luego $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^t) = (1/-2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss
A tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss podemos llegar de $(A|I_2)$, a la expresión $(I_2|B)$, donde $B = A^{-1}$.

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}\text{Cambio} \\ F_1 \text{ por } F_2\end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{matrix}F_1/(2) \\ \ \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{por tanto: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la expresión $A\cdot X = 2\cdot(C - D^t)$, por la izquierda por la matriz inversa A^{-1}, tenemos
$A\cdot X = 2\cdot(C - D^t) \rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot 2\cdot(C - D^t) \rightarrow I_2\cdot X = 2\cdot A^{-1}\cdot(C - D^t) \rightarrow X = 2\cdot A^{-1}\cdot(C - D^t)$.

La matriz pedida es $\mathbf{X} = 2\cdot A^{-1}\cdot(C - D^t) = 2\cdot(1/-2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^T\right)\cdot =$

$$= (-1)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

b)
Si A(0, 2), B(2, 0), C(4, 0), D(6, 3) y E(3,6) son los vértices de una región factible, determine, en esa región,

el valor mínimo y el valor máximo de la función $F(x,y) = 4x - 3y + 8$ e indique los puntos donde se alcanzan.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región convexa acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,2), B(2,0), C(4,0), D(6,3) y E(3,6). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,2) = 4(0) - 3(2) + 8 **= 2**; F(2,0) = 4(2) - 3(0) + 8 = 16; **F(4,0)** = 4(4) - 3(0) + 8 **= 24**;
F(6,3) = 4(6) - 3(3) + 8 = 23; **F(3,6)** = 4(3) - 3(6) + 8 **= 2**.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el mínimo absoluto de la función F en la región es 2** (el menor valor en los vértices) y **se alcanza en los vértices A(0,2) y E(3,6) por tanto se alcanza en todo el segmento AE, y el máximo absoluto de la función F en la región es 24** (el mayor valor en los vértices) y **se alcanza en C(4,0).**

EJERCICIO 2 (B)

(2'5 puntos) Represente gráficamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

Solución

Represente gráficamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

Como es una función polinómica su dominio es R.

Cortes:
Para x = 0, punto (0,f(0)) = (0,0)

Para f(x) = 0 $\rightarrow$ $x^3 - 6x^2 + 12x = 0 = x\cdot(x^2 - 6x + 12)$, de donde x = 0 y $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 48}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-12}}{2}$, que no tiene soluciones reales. El punto es (0,0)

Monotonía. Estudio de la primera derivada f'(x).

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$.
De f'(x) = 0, tenemos $3x^2 - 12x + 12 = 0 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, de donde x = 2 (doble) será el posible extremo relativo de f.
Como $f'(0) = 3(0)^2 - 12(0) + 12 = 12 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,2)$.
Como $f'(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 12 = 3 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(2,+\infty)$.
Por tanto f es estrictamente creciente en R y no tiene ni máximos ni mínimos relativos

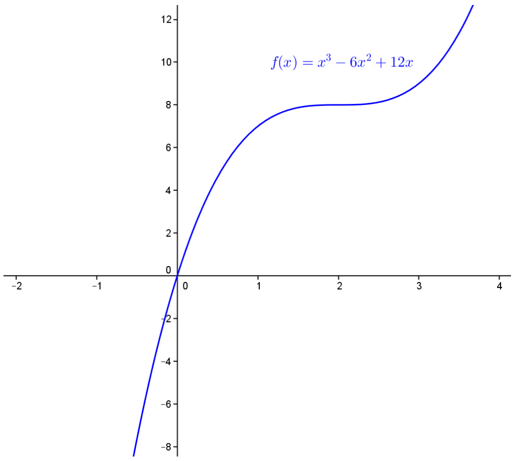
Curvatura. Estudio de la segunda derivada f''(x).

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$; $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$; $f''(x) = 6x - 12$.

De f''(x) = 0, tenemos 6x - 12 = 0, de donde x = 2, que será el posible punto de inflexión.
De $f''(0) = 6(0) - 12 = -12 < 0$, tenemos que f(x) es cóncava ($\cap$) en $(-\infty,2)$.
De $f''(3) = 6(3) - 12 = 6 > 0$, tenemos que f(x) es convexa ($\cup$) en $(2,+\infty)$.
Por definición en x = 2 hay un punto de inflexión, que vale f(2) $= (2)^3 - 6(2)^2 + 12(2)$ **= 8.**

Teniendo en cuenta lo anterior y su comportamiento en $\pm\infty$
Como $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 12x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3) = (-\infty)^3 = -\infty$, en $-\infty$, f vale $-\infty$
Como $\lim_{x\to+\infty}(x^3 - 6x^2 + 12x) = \lim_{x\to+\infty}(x^3) = (+\infty)^3 = +\infty$, en $+\infty$, f vale $+\infty$

Un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3 (B)

El 25% de los estudiantes de una Universidad lee las noticias en prensa escrita en papel, el 70% en prensa digital y el 10% en ambos formatos. Elegido, al azar, un estudiante de esa Universidad:

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que lea las noticias en formato papel o digital.

b) (0'75 puntos) Sabiendo que lee las noticias en prensa digital, calcule la probabilidad de que también las lea en prensa escrita en papel.

c) (0'75 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que lea las noticias exclusivamente en uno de los dos formatos?

Solución

El 25% de los estudiantes de una Universidad lee las noticias en prensa escrita en papel, el 70% en prensa digital y el 10% en ambos formatos. Elegido, al azar, un estudiante de esa Universidad:

a)

Calcule la probabilidad de que lea las noticias en formato papel o digital.

Llamamos A y B a los sucesos "leen prensa en papel" y "leen prensa digital".

Del problema tenemos: p(A) = 25% = 0'25, p(B) = 70% = 0'7 y $p(A\cap B)$ = 10% = 0'1.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **p(lean en papel o en digital) =** $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'25 + 0'7 - 0'1 **= 0'85.**

b)

Sabiendo que lee las noticias en prensa digital, calcule la probabilidad de que también las lea en prensa escrita en papel.

Me piden **p(lea en papel. sabiendo que lee en digital) = p(A/B) =** $\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ = (0'1)/(0'7) **= 1/7** ≅ **0'1429**.

c)

¿Cuál es la probabilidad de que lea las noticias exclusivamente en uno de los dos formatos?

Me piden **p(lea en papel y no en digital) o p(lea en digital y no en papel) =**
= p(A y noB) o p(B y noA) = $\mathbf{p(A\cap B^C) + p(B\cap A^C)} =$ $p(A) - p(A\cap B) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'25 - 0'1 + 0'7 - 0'1=
= 0'75.

EJERCICIO 4 (B)

Para estimar la proporción de habitantes que es favorable a la construcción de un centro comercial en un municipio, se ha obtenido el intervalo de confianza (0'31, 0'39), al 94%.

a) (1 punto) ¿Cuál ha sido el valor de la proporción muestral?

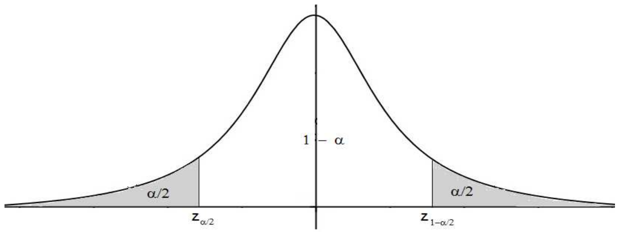
b) (0'5 puntos) Si la muestra aleatoria elegida de esa población para el estudio fue de 500 personas, ¿cuántas de ellas deseaban la construcción del centro comercial?

c) (1 punto) Se desea repetir el estudio para obtener un intervalo de confianza con un error máximo de 0'03 y el mismo nivel de confianza. ¿Cuántas personas, como mínimo, debe tener la nueva muestra aleatoria?

Solución

*Sabemos que si $n \geq 30$ para la proporción muestral **p**, el estimador PROPORCIÓN MUESTRAL $\hat{p}$ sigue* *una normal* $N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *que es la distribución muestral de proporciones, donde* $\hat{q} = 1 - \hat{p}$, *y*

generalmente escribimos $\boldsymbol{p} \approx N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$ *o* $\boldsymbol{p} \rightarrow N(\hat{p}, \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}})$.



Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la proporción ***p*** *de las muestras es:*

$$I.C.(\boldsymbol{p}) = \left(\hat{p} - z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada* $Z \approx N(0,1)$ *que verifica* $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha/2$.

Del intervalo vemos que $\hat{p} = (a + b)/2$

El error cometido es $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = (b-a)/2$, *de donde el tamaño de la muestra es* $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2}$.

Para estimar la proporción de habitantes que es favorable a la construcción de un centro comercial en un municipio, se ha obtenido el intervalo de confianza (0'31, 0'39), al 94%.

a)

¿Cuál ha sido el valor de la proporción muestral?

El valor de la proporción muestral es: $\hat{p}$ **=** (0'31 + 0'39)/2 **= 0'35.**

b)

Si la muestra aleatoria elegida de esa población para el estudio fue de 500 personas, ¿cuántas de ellas deseaban la construcción del centro comercial?

Personas desean la construcción = total personas de la muestra x proporción de la muestra =
= 500·0'35 **= 175 personas.**

c)

Se desea repetir el estudio para obtener un intervalo de confianza con un error máximo de 0'03 y el mismo nivel de confianza. ¿Cuántas personas, como mínimo, debe tener la nueva muestra aleatoria?

Datos del problema: Error = E < 0'03, $\hat{p}$ = 0'35, $\hat{q}$ = 1 - 0'35 = 0'65, nivel de confianza 1 – α = 94% = 0'94, de donde α= 0'06= = 6% = 0'06, como *nivel de significación*.

De α = 0'06 tenemos α/2 = 0'03

De la igualdad $p(Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'03 = 0'97$, que se mira en la tabla de la distribución Normal N(0,1), y nos dará el correspondiente valor crítico $z_{1-\alpha/2}$. Mirando en la tabla de la N(0,1) vemos que el valor 0'97 no viene en la tabla y el valor más próximo es 0'9699, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'88 (Interpolando $z_{1-\alpha/2}$ = 1'88143).

De $E < z_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, tenemos tamaño de la muestra $n > \frac{(z_{1-\alpha/2})^2 \cdot \hat{p}\cdot\hat{q}}{E^2} = \frac{(1'88)^2 \cdot 0'35 \cdot 0'65}{(0'03)^2} \cong 893'4178$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es **n = 894 personas.**