SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SEPTIEMBRE 2014 MODELO 6 (COMÚN)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (A)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a) (1'25 puntos) Calcule las matrices X e Y para las que se verifica

$$X + Y = A \quad \text{y} \quad 3X + Y = B.$$

b) (1'25 puntos) Halle la matriz Z que verifica $B\cdot Z + B^t = 2I_2$.

Solución

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

a)

Calcule las matrices X e Y para las que se verifica

$$X + Y = A \quad \text{y} \quad 3X + Y = B.$$

$X + Y = A \quad \rightarrow \quad X + Y = A \quad \rightarrow \quad X + Y = A$

$3X + Y = B\ (F_2 - F_1) \quad \rightarrow \quad 2X = B - A \quad \rightarrow \quad X = (1/2)\cdot(B - A)$, de donde

$Y = A - X = A - (1/2)\cdot(B - A) = A - (1/2)B + (1/2)A = (3/2)A - (1/2)B$.

Luego $\mathbf{X = (1/2)\cdot(B - A) =} (1/2)\cdot\left(\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\right) = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 0 & -7/2 \\ 7/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{Y =} (3/2)A - (1/2)B \mathbf{=} (3/2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -21/2 \\ 6/2 & -3/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -5/2 & 2/2 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 1 & -21/2 \\ 11/2 & -5/2 \end{pmatrix}$.

b)

Halle la matriz Z que verifica $B\cdot Z + B^t = 2I_2$.

Como $\det(B) = |B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$, existe la matriz inversa $B^{-1} = (1/|B|)\cdot Adj(B^t)$.

$B^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $Adj(B^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, luego $B^{-1} = (1/|B|)\cdot Adj(B^t) = (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

También se podría haber calculado por el método de Gauss

La matriz B tiene inversa si mediante transformaciones elementales por filas de Gauss, podemos llegar de $(B|I_2)$, a la expresión $(I_2|B^{-1})$.

$(B|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2 + 5F_1 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ F_2/2 \end{matrix} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5/2 & 1/2 \end{array}\right)$, por tanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

De $B\cdot Z + B^t = 2I_2$, tenemos $B\cdot Z = 2I_2 - B^t$. Multiplicando la expresión $B\cdot Z = 2I_2 - B^t$ por la izquierda, por la matriz inversa B^{-1}, tenemos $B^{-1}\cdot B\cdot Z = B^{-1}\cdot(2I_2 - B^t) \rightarrow I_2\cdot Z = 2\cdot B^{-1} - B^{-1}\cdot B^t \rightarrow Z = 2\cdot B^{-1} - B^{-1}\cdot B^t$.

La matriz pedida es $\mathbf{Z = 2\cdot B^{-1} - B^{-1}\cdot B^t} = 2\cdot(1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - (1/2)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 5 & -23 \end{pmatrix} \mathbf{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5/2 & -23/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5/2 & 25/2 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2 (A)

Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por $B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6$, con $0 \le t \le 10$.

a) (0'8 puntos) ¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo (t = 0) y al final del décimo año (t = 10)?.

b) (1'7 puntos) ¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles son sus cuantías?

Solución

Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por $B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6$, con $0 \le t \le 10$.

a)

¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo (t = 0) y al final del décimo año (t = 10)?.

Para t = 0, B(0) = -6, es decir en el periodo inicial ha tenido unas *perdidas* de 6 mil euros.

Para t = 10, B(10) = $2(10)^3 - 36(10)^2 + 162(10) - 6$ **= 14, es decir en el periodo final ha tenido unas *ganacias* de 14 mil euros**

b)

¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles son sus cuantías?

Sabemos que B(t) es una función continua y derivable en todo R, en particular es continua en $0 \le t \le 10$, y derivable en $0 < t < 10$.

También sabemos que los extremos absolutos de B(t) se encuentran entre las soluciones de B'(t) = 0, y los extremos del intervalo t = 0 y t = 10.

$B(t) = 2t^3 - 36t^2 + 162t - 6 \rightarrow B'(t) = 6t^2 - 72t + 162$.

De B'(t) = 0, tenemos $6t^2 - 72t + 162 = 0 \rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \rightarrow t = \dfrac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4\cdot 27}}{2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{36}}{2} =$

$= \dfrac{12 \pm 6}{2} = 6 \pm 3$, de donde t = 3 y t = 9, que será los posibles extremos relativos.

Evaluamos la función B(t) en los valores 0, 3, 9, 10.

B(0) = -6

B(3) = $2(3)^3 - 36(3)^2 + 162(3) - 6$ **= 210**

B(9) = $2(9)^3 - 36(9)^2 + 162(9) - 6$ **= -6**

$B(10) = 2(10)^3 - 36(10)^2 + 162(10) - 6 = 14$.

Vemos que el máximo beneficio es de 210 mil euros y se alcanza en el tercer año (t=3); y que el mínimo beneficio es de menos 6 mil euros y se alcanza en el comienzo (t=0) y en el noveno año (t=9).

EJERCICIO 3 (A)

Se sabe que dos alumnos de la asignatura de Matemáticas asisten a clase, de forma independiente, el primero a un 85% de las clases y el segundo a un 35%. Tomando al azar un día de clase, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a) (0'75 puntos) Que los dos hayan asistido a clase ese día.

b) (0'75 puntos) Que alguno de ellos haya asistido a clase ese día.

c) (0'5 puntos) Que ninguno haya asistido a clase ese día.

d) (0'5 puntos) Que haya asistido a clase el segundo, sabiendo que el primero no ha asistido.

Solución

Se sabe que dos alumnos de la asignatura de Matemáticas asisten a clase, de forma independiente, el primero a un 85% de las clases y el segundo a un 35%. Tomando al azar un día de clase, calcule la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos:

a)

Que los dos hayan asistido a clase ese día.

Llamamos A y B a los sucesos "asistir a clase el alumno 1" y "asistir a clase el alumno 2".

Del problema tenemos:

Asisten a clase, de forma independiente, el primero a un 85% de las clases y el segundo a un 35%

$\rightarrow$ p(A) = 85% = 0'85, p(B) = 35% = 0'35.

Son sucesos independientes $\rightarrow$ $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B) = 0'85\cdot 0'35 = 0'2975$.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$;

$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **p(Que los dos hayan asistido a clase ese día) = $p(A\cap B)$ = 0'2975.**

b)

Que alguno de ellos haya asistido a clase ese día.

Me piden **p(Que alguno de ellos haya asistido a clase ese día) = $p(A\cup B)$ =** $p(A) + p(B) - p(A\cap B) =$
$= 0'85 + 0'35 - 0'2975$ **= 0'9025.**

c)

Que ninguno haya asistido a clase ese día.

Me piden **p(Que ninguno haya asistido a clase ese día) = $p(A^C\cap B^C)$ =** {Ley de Morgan} =
$= p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B) = 1 - 0'9025$ **= 0'0975**

d)

Que haya asistido a clase el segundo, sabiendo que el primero no ha asistido.

Me piden **p(Que haya asistido a clase el segundo, sabiendo que el primero no ha asistido) = p(B/A^C)**

Luego **p(B/A^C)** $= \dfrac{p(B \cap A^C)}{p(A^C)}$ **=** $\dfrac{p(B) - p(A \cap B)}{1 - p(A)}$ = **(**0'35 - 0'2975)/(1 – 0'85) **= 0'35**.

EJERCICIO 4 (A)

(2'5 puntos) La concejalía de Educación de una determinada localidad afirma que el tiempo medio dedicado a la lectura por los jóvenes de entre 15 y 20 años de edad es, a lo sumo, 8 horas semanales. Para contrastar esta hipótesis ($H_0 : \mu \le 8$), se escoge al azar una muestra de 100 jóvenes, de entre 15 y 20 años, y se obtiene una media de 8'3 horas de dedicación a la lectura. Supuesto que el tiempo dedicado a la lectura sigue una ley Normal con desviación típica igual a 1 hora, ¿qué se puede decir, a un nivel de significación del 5%, sobre la afirmación de la concejalía?

Solución

Del problema tenemos N(8'3;1), es decir media = μ = $\overline{x}$ = 8'3 y desviación típica poblacional = σ = 1 ; hipótesis a contrastar $H_0 : \mu_0 \le 8$, a un nivel de significación de α = 5% = 0,05; tamaño de la muestra =
= n = 100; media muestral = $\overline{x}$ = 8'3. *Es un contraste unilateral y trabajamos con la normal N(0,1).*

Sabemos que *la distribución muestral de medias sigue también una distribución normal:* N(μ, $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Trabajaremos con lo normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.

También se puede hacer con la distribución normal muestral y es parecido a los intervalos de confianza.

El problema la dividimos en cinco etapas

<u>Etapa 1</u>: Formulamos la hipótesis nula y la alternativa.

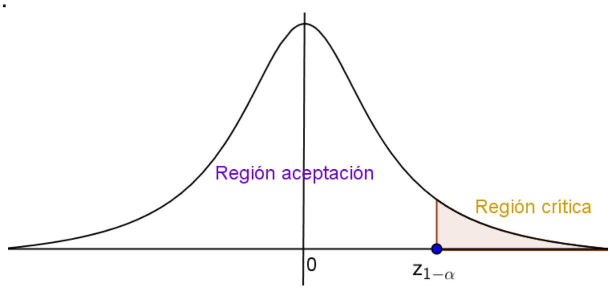
Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \le 8$ (lectura a lo sumo 8 horas) y $H_1 : \mu_0 > 8$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la derecha del punto crítico $z_{1-\alpha}$.*

<u>Etapa 2</u>: Calculamos el punto o puntos críticos que nos darán las regiones críticas y de aceptación.

Para el nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos un nivel de confianza o probabilidad = 1 - α = 0,95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que dicha probabilidad no viene en la tabla, y los valores más próximos es 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto el **valor crítico** es la media de ambos **$z_{1-\alpha}$ =** (1'64 + 1'65)/2 **= 1'645**, que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



<u>Etapas 3 y 4</u>: Ponemos el estadístico del contraste y calculamos el valor observado.

En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1), y

el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{8'3 - 8}{1/\sqrt{100}} = 3$.

<u>Etapa 5</u>: Comparamos el valor observado con el punto crítico para tomar la decisión adecuada.
Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = 3 está a la derecha del punto crítico **$z_{1-\alpha}$ = 1'645**, estamos en la zona de rechazo.

Resumiendo **rechazamos la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \le 8$, y aceptamos la hipótesis alternativa $H_1 : \mu_0 > 8$, para un nivel de significación α = 0'05.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos que el tiempo medio dedicado a la lectura por los jóvenes de entre 15 y 20 años de edad, supera las 8 horas semanales.

OPCION B

EJERCICIO 1 (B)

a) (1'5 puntos) Plantee, sin resolver, el siguiente problema:
"Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?"
b) (1 punto) Represente el recinto que determinan las inecuaciones:

$$2x \geq 10 + y;\ \ x \leq 2(5 - y);\ \ x \geq 0;\ \ y \geq 0.$$

Solución

a)
Plantee, sin resolver, el siguiente problema:
"Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?"

Sea x = nº de envases de tamaño pequeño.
Sea y = nº de envases de tamaño grande.
De "La capacidad no le permite almacenar más de 1000 envases" $\rightarrow$ $x + y \leq 1000$.
De "debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños " $\rightarrow$ $x \geq 100$.
De "debe mantener un stock mínimo de y 200 envases grandes" $\rightarrow$ $y \geq 100$.
De "La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños" $\rightarrow$ $y \geq x$.
De "el coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande", la función a optimizar es $F(x,y) = 0'1x + 0'2y$.

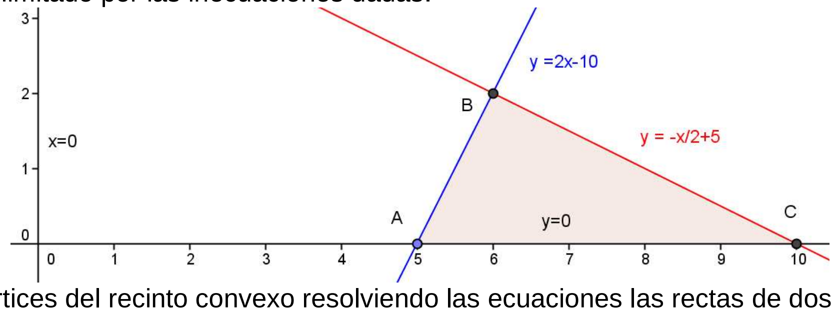
Resumiendo:
Función a optimizar es $F(x,y) = 0'1x + 0'2y$.
Restricciones: $x + y \leq 1000$; $x \geq 100$; $y \geq 100$; $y \geq x$
b)
Represente el recinto que determinan las inecuaciones: $2x \geq 10 + y$; $x \leq 2(5 - y)$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Las desigualdades $2x \geq 10 + y$; $x \leq 2(5 – y)$; $x \geq 0$; $y \geq 0$, las transformamos en igualdades, y sus gráficas ya son rectas, $2x = 10 + y$; $x = 2(5 - y) = 10 – 2y$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = 2x - 10\ ;\ \ y = 5 - x/2;\ \ x = 0;\ \ y = 0$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, entre las que estarán los bordes del recinto convexo delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De $y = 0$ e $y = 2x-10$, tenemos $0 = 2x - 10 \rightarrow x = 10/2 = 5$, y el vértice A(5,0).
De $y = 2x-10$ e $y = -x/2+ 5$, tenemos $2x-10 = -x/2+ 5 \rightarrow 4x-20 = -x + 10 \rightarrow 5x = 30$, de donde $x = 6$ e

y = 2, y el vértice es B(6,2).
De y = 0 e y = -x/2+5, tenemos 0 = -x/2+5 → x = 10, y el vértice es C(10,0).

Vemos que la región factible es el polígono conexo limitado por los vértices del recinto, que son: A(5,0), B(6,2) y C(10,0).

EJERCICIO 2 (B)

Sea la función $f(x) = -x^2 + px + q$.
a) (1'5 puntos) Calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto (-4,-5) y presente un máximo en el punto de abscisa x = -1. Determine el valor de f(x) en ese punto.
b) (1 punto) Represente la grafica de f para p = 2 y q = -1 y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa x = -2.

Solución

Sea la función $f(x) = -x^2 + px + q$.
a)
Calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto (-4,-5) y presente un máximo en el punto de abscisa x = -1. Determine el valor de f(x) en ese punto.

Como f pasa por el punto (-4,-5), tenemos **f(-4) = -5.**
Como f tiene un máximo en el punto de abscisa x = -1, tenemos **f'(-1) = 0.**
$f(x) = -x^2 + px + q$; $f'(x) = -2x + p$

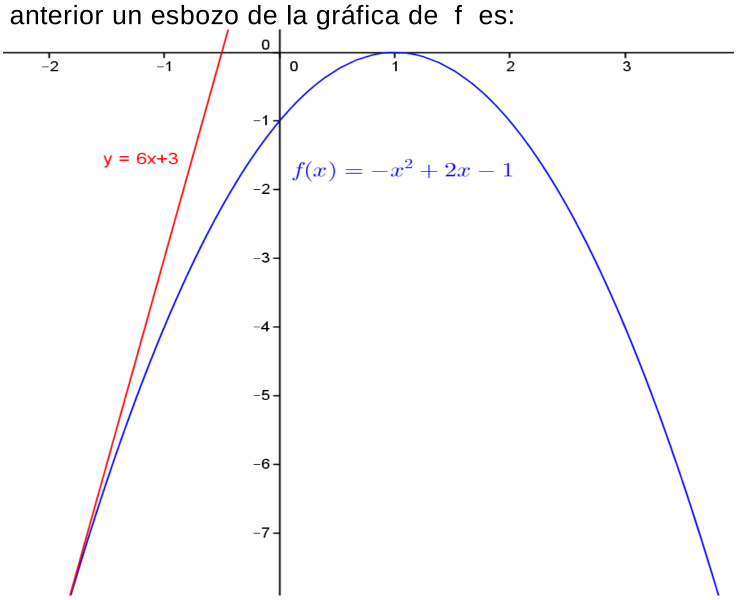
De f'(-1) = 0 → -2(-1) + p = 0, de donde **p = -2.**
De f(-4) = -5 → $-(-4)^2 - 2(-4) + q = -5$ → -16 + 8 + q = -5, de donde **q = 3.**

Por tanto los valores pedidos son p = -2, q = 3 y f(-1) = $-(-1)^2 - 2(-1) + 3$ **= 4.**

b)
Represente la grafica de f para p = 2 y q = -1 y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa x = -2.

La gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ es una parábola, con las ramas hacia abajo ∩ (el nº que multiplica a x^2 es negativo), con vértice V de abscisa la solución de f'(x) = 0 = -2x+2, de donde x = 1 y V(1,f(1)) = (1,0).
Cortes:
Para x = 0, punto (0,-1).
Para f(x) = 0, $-x^2 + 2x - 1 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0 = (x – 1)^2$, solución x = 1 (doble), punto (1,0) que era el vértice.
Le damos un valor a la derecha del vértice (x = 1). Para x = 2, $f(2) = -(2)^2 + 2(2) - 1 = -1$, punto (2,-1).

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica de f es:



La recta tangente en x = -2 es y - f(-2) = f'(-2)·(x - (-2))
$f(x) = -x^2 + 2x - 1$ → $f(-2) = -(-2)^2 + 2(-2) - 1 = -9$.
f'(x) = -2x+2 → f'(-2) = -2(-2) + 2 = 6

La recta tangente en x = 2 es **y - (-9) = 6·(x + 2)**, de donde **y = 6x + 3.**

EJERCICIO 3 (B)

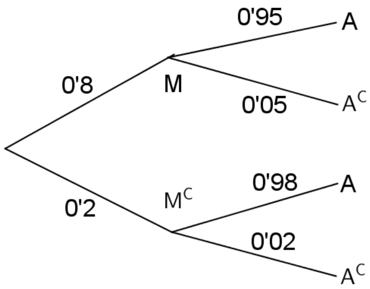
En una tienda de complementos disponen de 100 bolsos, de los cuales 80 son de una conocida marca y 20 son imitaciones casi perfectas de dicha marca. Una inspección encarga a un experto el peritaje de los bolsos de la tienda. Se sabe que este experto acierta en el 95% de sus peritajes cuando el bolso es auténtico y que detecta el 98% de las imitaciones. Se elige, al azar, un bolso para su examen:
a) (1'25 puntos) Calcule la probabilidad de que el experto acierte en su dictamen sobre ese bolso.
b) (1'25 puntos) Si el experto no ha acertado en su peritaje, calcule la probabilidad de que el bolso sea auténtico.

Solución

En una tienda de complementos disponen de 100 bolsos, de los cuales 80 son de una conocida marca y 20 son imitaciones casi perfectas de dicha marca. Una inspección encarga a un experto el peritaje de los bolsos de la tienda. Se sabe que este experto acierta en el 95% de sus peritajes cuando el bolso es auténtico y que detecta el 98% de las imitaciones. Se elige, al azar, un bolso para su examen:
a)
Calcule la probabilidad de que el experto acierte en su dictamen sobre ese bolso.

Llamemos M, M^C, A y A^C, a los sucesos siguientes, "bolso de marca", "bolso de imitación", "acierta en el peritaje" y "no acierta en el peritaje", respectivamente.

Datos del problema p(M) = 80/100 = 0'8; p(M^C) = 20/100 = 0'2 ; p(A/M) = 95% = 0'95, p(A/M^C) = 98% = = 0'98...
Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que el experto acierte en su dictamen es:

p(A) = p(M).p(A/M) + p(M^C).p(A/M^C) = (0'8)·(0'95) + (0'2)·(0'98) **= 238/250 = 0'956**.

b)
Si el experto no ha acertado en su peritaje, calcule la probabilidad de que el bolso sea auténtico.

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(M/A^C) =} \frac{p\left(M \cap A^C\right)}{p(A^C)} = \frac{p\left(M\right).p(A^C/M)}{1 - p(A)} = \frac{(0'8)\cdot(0'05)}{1 - 0'956} \mathbf{= (10/11) \cong 0'91}.$$

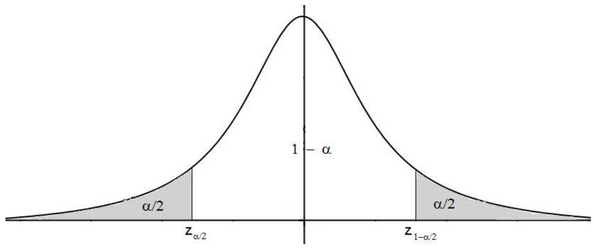
EJERCICIO 4 (B)

El peso de los huevos de una granja sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 1'23 gramos. Para estimar la media poblacional se ha tomado una muestra de dos docenas de huevos que han dado un peso total de 1615'2 gramos.
a) (1'75 puntos) Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media poblacional.
b) (0'75 puntos) Con el mismo nivel de confianza anterior, si nos exigieran que el intervalo tuviera una amplitud máxima de 0'8, ¿de qué tamaño, como mínimo, habría que tomar la muestra?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el error máximo de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo cual la amplitud = b – a = = 2E, luego E = (b –a)/2 para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{(b-a)/2}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

El peso de los huevos de una granja sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 1’23 gramos. Para estimar la media poblacional se ha tomado una muestra de dos docenas de huevos que han dado un peso total de 1615’2 gramos.

a)
Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media poblacional.

Datos del problema: n = 2·12 = 24; $\overline{x}$ = 1615’2/24 = 67’3; σ = 1’23; nivel de confianza = 96% = 0’96 = 1 - α, de donde α = 0’04, con la cual α/2 = 0’04/2 = 0’02.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'02 = 0'98$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0’98 vemos que no viene, y que la probabilidad más próxima es 0’9798, que corresponden a $z_{1-\alpha/2} = 2'05$ (interpolando el valor sería 2’054), por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\textbf{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(67'3 - 2'05\cdot\frac{1'23}{\sqrt{24}}, 67'3 + 2'05\cdot\frac{1'23}{\sqrt{24}}\right) \cong$$

≅ (66’7853,67’8147)

b)
Con el mismo nivel de confianza anterior, si nos exigieran que el intervalo tuviera una amplitud máxima de 0’8, ¿de qué tamaño, como mínimo, habría que tomar la muestra?

Datos del problema: Amplitud = b – a = 0’8, de donde E = (b – a)/2 = 0’8/2 = 0’4, σ = 1’23, igual nivel de confianza = 96% nos da $z_{1-\alpha/2} = 2'05$.

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $n \ge \left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'05\cdot 1'23}{0'4}\right)^2$ = 39’74, es decir **el tamaño mínimo de la muestra de huevos es de n = 40 huevos, es decir 3 docenas de huevos, mas 4 huevos sueltos.**