

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2003

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A

Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $A = M \cdot M^t - 5M$ (M^t indica la traspuesta de M).

b) Calcule la matriz $B = M^{-1}$ y resuelva la ecuación $N + X \cdot M = M \cdot B$, donde X es una matriz 2×2 .

SOCIALES II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

b)

$$B = M^{-1} = \frac{(M^d)^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$N + X \cdot M = M \cdot B \Rightarrow X = (M \cdot B - N) \cdot M^{-1} = (I - N) \cdot M^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de m para que dicha matriz tenga inversa.

b) Haciendo $m = 0$, resuelva la ecuación matricial $A \cdot X \cdot A = I_2$, donde I_2 es la matriz unidad de orden 2 y X es una matriz cuadrada de orden 2.

SOCIALES II. 2003 RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{vmatrix} = 3m + 3 - m + m^2 = m^2 + 2m + 3 = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución.}$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de m .

b)

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X \cdot A = I_2 \Rightarrow X = A^{-1} \cdot I_2 \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

Determine la matriz X , de orden 2, que verifica la igualdad:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOCIALES II. 2003 RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\begin{aligned} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ c & 3c+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ 3a+b=17 \\ c=-1 \\ 3c+d=3 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule $(A^t \cdot B - 2 \cdot I)^{-1}$.

SOCIALES II. 2003 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$M = A^t \cdot B - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa de esta matriz M .

$$M^{-1} = \frac{(M^d)^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Resuelva la ecuación:
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

SOCIALES II. 2003 RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 - 3x - 3x - 20 - 10 - 5x + 36 - x = 0 \Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de x para los que se verifica $A^2 = 2A$

b) Para $x = -1$, halle A^{-1} . Compruebe el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$.

SOCIALES II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+4x=2x \\ x^2+4x+4=2x+4 \end{cases} \Rightarrow x=0 ; x=-2$$

b) Vamos a calcular la inversa de A .

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$