PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2006

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES Y DETERMINANTES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A

Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentre el valor o valores de x de forma que $B^2 = A$.
b) Igualmente para que $A - I_2 = B^{-1}$.
c) Determine x para que $A \cdot B = I_2$.
SOCIALES II. 2006 JUNIO. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1$

b) Vamos a calcular la inversa de B.

$$B^{-1} = \frac{(B^d)^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^t}{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0$$

c) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1$

También podríamos haberlo hecho de la siguiente manera:

$$A \cdot B = I_2 \Rightarrow A \cdot B \cdot B^{-1} = I_2 \cdot B^{-1} \Rightarrow A = B^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A^{-1}\cdot(2B+3I_2)$.

b) Determine la matriz X para que $X\cdot A=A+I_2$.

SOCIALES II. 2006 RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la inversa de A.

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-1}=\frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot(2B+3I_2)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$$

b)

$$X\cdot A=A+I_2\Rightarrow\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a-b & -a \\ 2c-d & -c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2a-b=3 \\ -a=-1 \\ 2c-d=-1 \\ -c=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=-1 \end{cases}$$

Luego la matriz es: $X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Calcule $A^{-1} \cdot (B - A^t)$.
SOCIALES II. 2006 RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{-2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot (B - A^t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;\; B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;;\; C=\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \;;\; D=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \;;\; E=\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Calcule los valores de los números reales x , y , z , para que se verifique la siguiente igualdad entre matrices: $E - x \cdot A \cdot B = y \cdot C + z \cdot D$

SOCIALES II. 2006 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Sustituimos las matrices en la ecuación y operamos.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} - x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos que resolver el sistema: $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = -2 \\ 3x - 5y + 2z = -5 \\ 4x + 2y - 3z = \;\;5 \end{array}\right\}$ cuya solución es: $x = 1;\, y = 2;\, z = 1$

Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$

Explique qué dimensión debe tener la matriz X **para que tenga sentido la ecuación matricial** $X \cdot A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$**. Resuelva dicha ecuación.**

SOCIALES II. 2006 RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Para que se pueda hacer el producto $X \cdot A$, la matriz X debe tener tantas columnas como filas tiene A, es decir, 2. La matriz resultante debe ser de orden (1,2) para que se pueda sumar con 2 B, luego la matriz X es de orden (1,2).

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-5b & 2a-4b \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-5b+2 & 2a-4b-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a-5b=-1 \\ 2a-4b=\ \ 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=7\ ;\ b=3$$

Luego la matriz X es: $X=\begin{pmatrix} 7 & 3 \end{pmatrix}$