

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2006

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Halle los valores de a y b para que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$ pase por el punto $(1, -3)$ y tenga el punto de inflexión en $x = -1$.

b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

SOCIALES II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f''(x)$.

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por } (1, -3) \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow a + 3 - 5 + b = -3 \Rightarrow a + b = -1 \\ \text{P.I. en } x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1; b = -2$$

b) Calculamos la derivada de la función:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x; g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } 2$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $g'(x)$	+	-	+
Función $g(x)$	C	D	C

\downarrow \downarrow
 Máximo $(0, 7)$ mínimo $(2, 3)$

Sea la función f definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f .

b) Calcule la ecuación la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 1$.
SOCIALES II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $\frac{x}{2x-1}$ es continua y derivable para $x \leq 0$; la función $x^2 + x$ es, también, continua y derivable para $x > 0$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 0$$

Luego la función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 2 = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$

Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = 2x - x^2$.

a) Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Representélas gráficamente.

b) Determine el valor de x para el que se hace mínima la función $h(x) = f(x) - g(x)$

SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

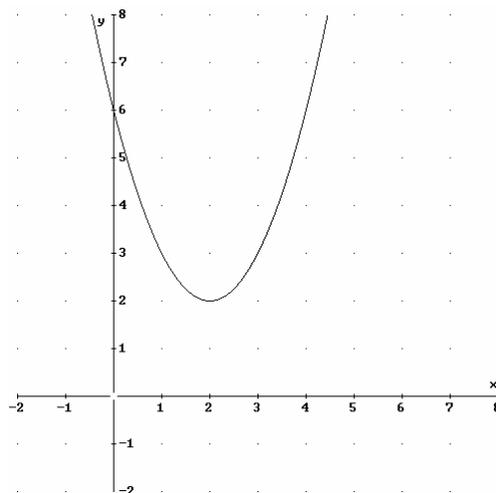
a) Para la función $f(x) = x^2 - 4x + 6$

Puntos de corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución, luego no corta al eje X.

Puntos de corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (0, 6)$.

Vértice $\Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$ vértice $(2, 2)$

Curvatura $\Rightarrow y''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$ Convexa



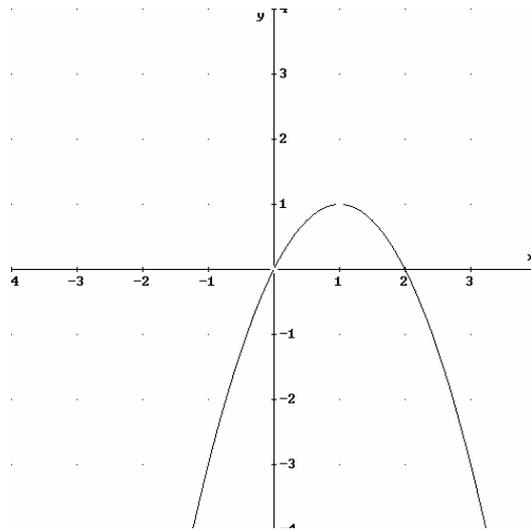
Para la función $g(x) = 2x - x^2$

Puntos de corte con el eje X $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2 \Rightarrow (0, 0)$ y $(2, 0)$.

Puntos de corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$.

Vértice $\Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ vértice $(1, 1)$

Curvatura $\Rightarrow y''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ Cóncava



b) Calculamos la función $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 6 - 2x + x^2 = 2x^2 - 6x + 6$

$$h'(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
Signo y'	-	+
Función	D	C

↓
mínimo $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$

b) $g(x) = (x^2 + 2) \cdot L(x^2 + 2)$

c) $h(x) = 3^{5x} + e^x$

SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x) = \frac{-3 \cdot x - 1 \cdot (1-3x)}{x^2} + 3 \cdot (5x-2)^2 \cdot 5 = \frac{-1}{x^2} + 15 \cdot (5x-2)^2$

b) $g'(x) = 2x \cdot L(x^2 + 2) + \frac{2x}{x^2 + 2} (x^2 + 2) = 2x \cdot [L(x^2 + 2) + 1]$

c) $h'(x) = 5 \cdot 3^{5x} \cdot L3 + e^x$

Consideremos la función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine la monotonía de f .

c) Represente gráficamente esta función.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función $x^2 - 1$ es continua y derivable para $x < 1$; la función $x - 1$ es, también, continua y derivable para $x > 1$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 1$$

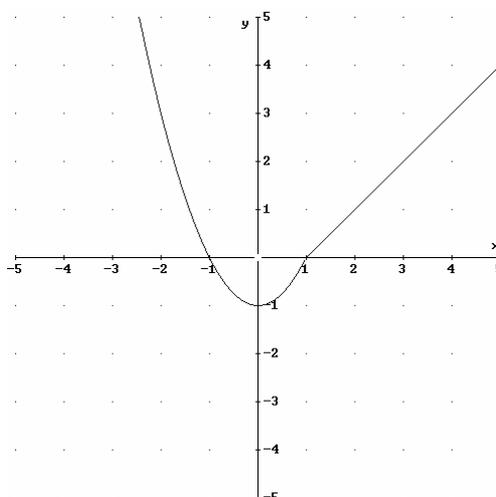
Luego la función $f(x)$ es continua en \mathbb{R} y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$

b)

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo y'	-	+	+
Función	D	C	C

c)



a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Se considera la función $f(x) = ax^2 - bx + 4$. Calcule los valores de los parámetros a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(1, 10)$.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x = 1$ es $y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1)$

$$g(1) = \frac{1}{2}$$

$$g'(x) = \frac{3 \cdot (x+1) - 1 \cdot (3x-2)}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(1) = \frac{5}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \cdot (x - 1) \Rightarrow 5x - 4y - 3 = 0$

b) Calculamos la derivada de $f(x) = ax^2 - bx + 4$.

$$f'(x) = 2ax - b$$

$$\text{Pasa por } (1,10) \Rightarrow f(1) = 10 \Rightarrow a - b + 4 = 10$$

$$\text{Extremo relativo en } (1,10) \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale: $a = -6$; $b = -12$

El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función B definida por:

$$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 7t & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 10 & \text{si } 5 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde t indica el tiempo transcurrido en años.

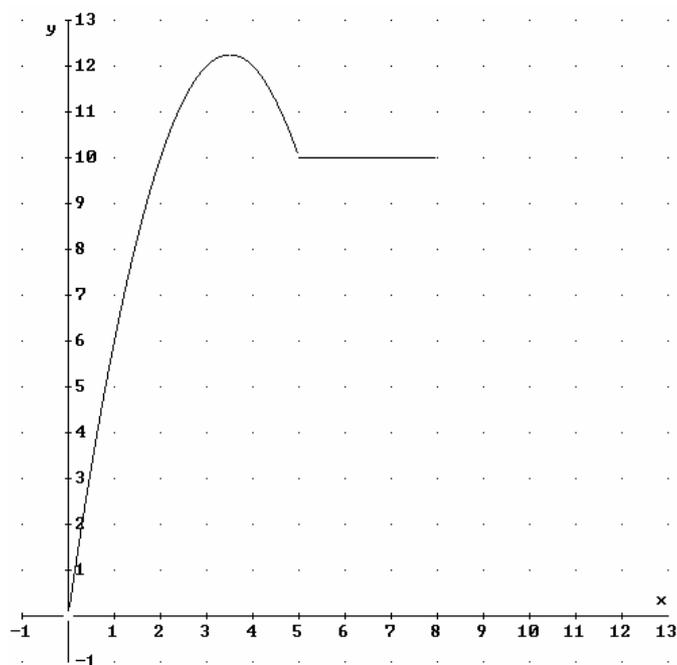
a) Represente gráficamente la función B y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11'25 millones de euros.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función B



Vemos que el beneficio aumenta en los 3'5 primeros años. Desde 3'5 a 5 años disminuye y entre 5 y 8 años se mantiene constante.

b) Resolvemos la ecuación $-t^2 + 7t = 11'25 \Rightarrow t^2 - 7t + 11'25 = 0 \Rightarrow t = 2'5 ; t = 4'5$

Luego, vemos que el beneficio es de 11'25 millones de euros a los 2'5 años y a los 4'5 años.

a) Dada la función $f(x) = a \cdot (x-1)^2 + bx$, calcule a y b para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas $(1,2)$ y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Calcule $g''(2)$ siendo $g(x) = \frac{1}{x} - x$.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de $f(x) = a \cdot (x-1)^2 + bx$.

$$f'(x) = 2a(x-1) + b$$

$$\text{Pasa por } (1,2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Extremo relativo en } x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

b) Calculamos la segunda derivada de $g(x) = \frac{1}{x} - x$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1$$

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow g''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

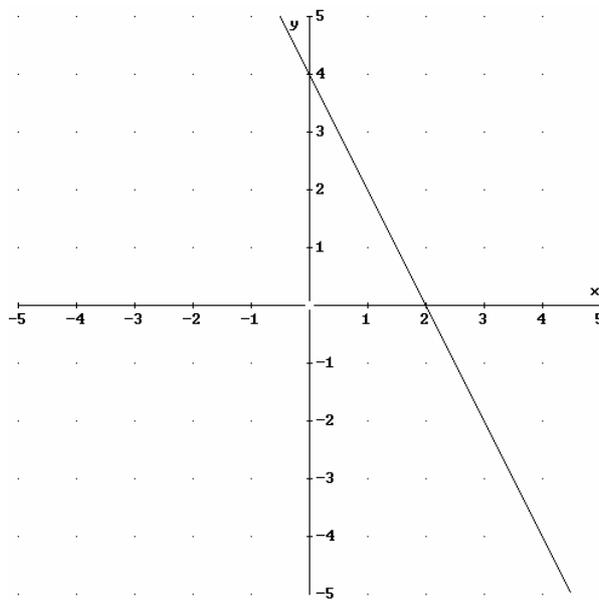
a) De una función f se sabe que la gráfica de su función derivada, f' , es la recta de ecuación $y = -2x + 4$. Estudie razonadamente la monotonía de la función f , a la vista de la gráfica de la derivada.

b) Dada la función $g(x) = \frac{4x-4}{x+4}$, calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 0$.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-\infty, 2)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(2, \infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b) La recta tangente en $x = 0$ es $y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0)$

$$g(0) = -1$$

$$g'(x) = \frac{4 \cdot (x+4) - 1 \cdot (4x-4)}{(x+4)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + 1 = \frac{5}{4} \cdot (x - 0) \Rightarrow 5x - 4y - 4 = 0$

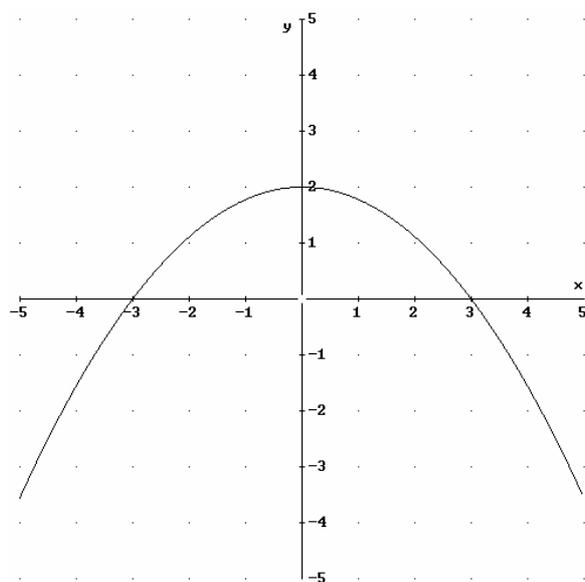
a) La gráfica de la función derivada de una función f es la parábola de vértice $(0,2)$ que corta al eje de abscisas en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$. A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f .

b) Calcule los extremos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x$.

SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(-3,3)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo g'	+	-	+
Función	C	D	C

\downarrow \downarrow
 Máximo $(-1, 2)$ mínimo $(1, -2)$

Se considera la función $f(x) = \frac{3-x}{2-x}$

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Estudie su monotonía.

c) Calcule sus asíntotas.

SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x = 1$ es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (2-x) - (-1) \cdot (3-x)}{(2-x)^2} \Rightarrow f'(1) = 1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow x - y + 1 = 0$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (2-x) - (-1) \cdot (3-x)}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	($-\infty, 2$)	($2, \infty$)
Signo f'	+	+
Función	C	C

Luego la función es creciente en su dominio.

c) *Verticales*: La recta $x = a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty \Rightarrow x = 2$$

Horizontales: La recta $y = b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{2-x} = 1 \Rightarrow y = 1$$

Oblicuas: No tiene.