

**PROBLEMAS RESUELTOS**  
**SELECTIVIDAD ANDALUCÍA**  
**2006**

**MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**

**TEMA 4: FUNCIONES**

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Halle los valores de  $a$  y  $b$  para que la gráfica de la función  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$  pase por el punto  $(1, -3)$  y tenga el punto de inflexión en  $x = -1$ .

b) Halle los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función definida por  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

**SOCIALES II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos  $f''(x)$ .

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Pasa por } (1, -3) \Rightarrow f(1) = -3 \Rightarrow a + 3 - 5 + b = -3 \Rightarrow a + b = -1 \\ \text{P.I. en } x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0 \Rightarrow -6a + 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1; b = -2$$

b) Calculamos la derivada de la función:

$$g'(x) = 3x^2 - 6x; g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } 2$$

	( $-\infty, 0$ )	(0, 2)	(2, $\infty$ )
Signo $g'(x)$	+	-	+
Función $g(x)$	C	D	C

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 Máximo (0,7)    mínimo (2,3)

Sea la función  $f$  definida por:  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de  $f$ .

b) Calcule la ecuación la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa  $x = 1$ .  
**SOCIALES II. 2006. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) La función  $\frac{x}{2x-1}$  es continua y derivable para  $x \leq 0$ ; la función  $x^2 + x$  es, también, continua y derivable para  $x > 0$ . Vamos a estudiar si la función  $f(x)$  es continua y derivable en  $x = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = 0$$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{(2x-1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 0$$

Luego la función  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{0\}$

b) La recta tangente en  $x = 1$  es  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$f'(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(1) = 3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 2 = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$

Sean las funciones  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  y  $g(x) = 2x - x^2$ .

a) Determine, para cada una de ellas, los puntos de corte con los ejes, el vértice y la curvatura. Representélas gráficamente.

b) Determine el valor de  $x$  para el que se hace mínima la función  $h(x) = f(x) - g(x)$

**SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

## R E S O L U C I Ó N

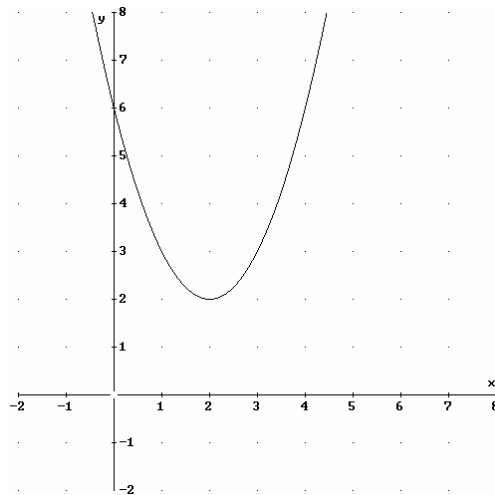
a) Para la función  $f(x) = x^2 - 4x + 6$

Puntos de corte con el eje X  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0 \Rightarrow$  No tiene solución, luego no corta al eje X.

Puntos de corte con el eje Y  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (0, 6)$ .

Vértice  $\Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$  vértice  $(2, 2)$

Curvatura  $\Rightarrow y''(x) = 2 > 0 \Rightarrow$  Convexa



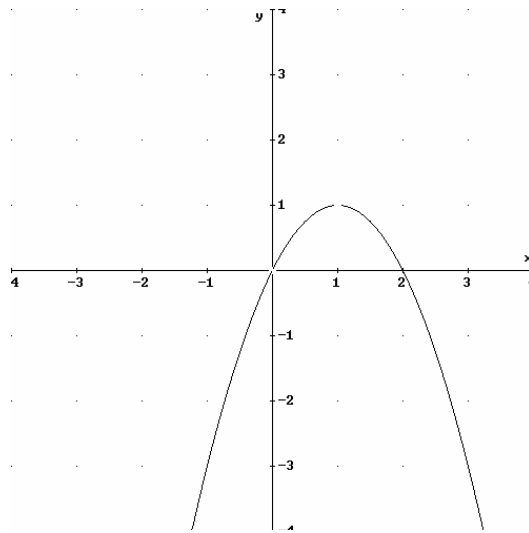
Para la función  $g(x) = 2x - x^2$

Puntos de corte con el eje X  $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0; x = 2 \Rightarrow (0, 0)$  y  $(2, 0)$ .

Puntos de corte con el eje Y  $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0, 0)$ .

Vértice  $\Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$  vértice  $(1, 1)$

Curvatura  $\Rightarrow y''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$  Cóncava



b) Calculamos la función  $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 6 - 2x + x^2 = 2x^2 - 6x + 6$

$$h'(x) = 4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \infty)$
Signo $y'$	-	+
Función	D	C

↓  
mínimo  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = \frac{1-3x}{x} + (5x-2)^3$

b)  $g(x) = (x^2 + 2) \cdot L(x^2 + 2)$

c)  $h(x) = 3^{5x} + e^x$

**SOCIALES II. 2006. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a)  $f'(x) = \frac{-3 \cdot x - 1 \cdot (1-3x)}{x^2} + 3 \cdot (5x-2)^2 \cdot 5 = \frac{-1}{x^2} + 15 \cdot (5x-2)^2$

b)  $g'(x) = 2x \cdot L(x^2 + 2) + \frac{2x}{x^2 + 2} (x^2 + 2) = 2x \cdot [L(x^2 + 2) + 1]$

c)  $h'(x) = 5 \cdot 3^{5x} \cdot L3 + e^x$

Consideremos la función:  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Estudie su continuidad y derivabilidad.

b) Determine la monotonía de  $f$ .

c) Represente gráficamente esta función.

**SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) La función  $x^2 - 1$  es continua y derivable para  $x < 1$ ; la función  $x - 1$  es, también, continua y derivable para  $x > 1$ . Vamos a estudiar si la función  $f(x)$  es continua y derivable en  $x = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

Calculamos la función derivada:  $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$  y como:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \\ f'(1^+) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x = 1$$

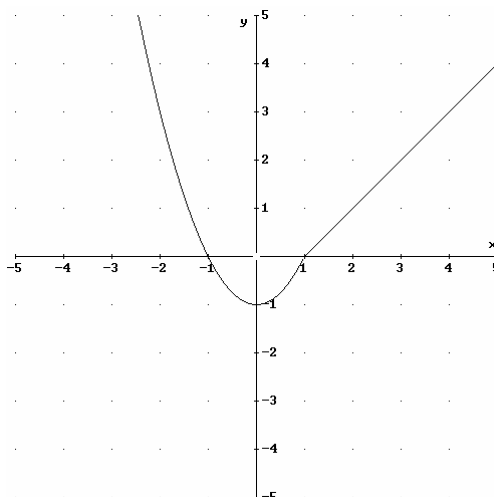
Luego la función  $f(x)$  es continua en  $\mathbb{R}$  y derivable en  $\mathbb{R} - \{1\}$

b)

$$f'(x) = 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
Signo $y'$	-	+	+
Función	D	C	C

c)



- a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $g(x) = \frac{3x-2}{x+1}$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .
- b) Se considera la función  $f(x) = ax^2 - bx + 4$ . Calcule los valores de los parámetros  $a$  y  $b$  para que  $f$  tenga un extremo relativo en el punto  $(1, 10)$ .
- SOCIALES II. 2006. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en  $x = 1$  es  $y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1)$

$$g(1) = \frac{1}{2}$$
$$g'(x) = \frac{3 \cdot (x+1) - 1 \cdot (3x-2)}{(x+1)^2} \Rightarrow g'(1) = \frac{5}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} \cdot (x - 1) \Rightarrow 5x - 4y - 3 = 0$

b) Calculamos la derivada de  $f(x) = ax^2 - bx + 4$ .

$$f'(x) = 2ax - b$$

Pasa por  $(1, 10) \Rightarrow f(1) = 10 \Rightarrow a - b + 4 = 10$

Extremo relativo en  $(1, 10) \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 2a - b = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale:  $a = -6$  ;  $b = -12$



El beneficio esperado de una empresa, en millones de euros, en los próximos ocho años viene dado por la función  $B$  definida por:

$$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 7t & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 10 & \text{si } 5 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

donde  $t$  indica el tiempo transcurrido en años.

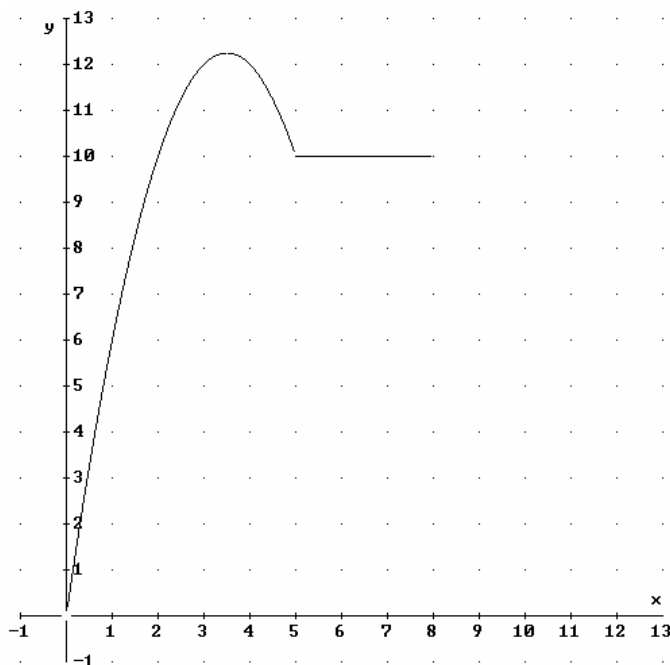
a) Represente gráficamente la función  $B$  y explique cómo es la evolución del beneficio esperado durante esos 8 años.

b) Calcule cuándo el beneficio esperado es de 11'25 millones de euros.

**SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

## R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función  $B$



Vemos que el beneficio aumenta en los 3'5 primeros años. Desde 3'5 a 5 años disminuye y entre 5 y 8 años se mantiene constante.

b) Resolvemos la ecuación  $-t^2 + 7t = 11'25 \Rightarrow t^2 - 7t + 11'25 = 0 \Rightarrow t = 2'5 ; t = 4'5$

Luego, vemos que el beneficio es de 11'25 millones de euros a los 2'5 años y a los 4'5 años.

Sea la función  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$

a) Determine la monotonía y los extremos relativos de  $f$ .

b) Calcule su punto de inflexión.

c) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, representéla.

SOCIALES II. 2006. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 2$$

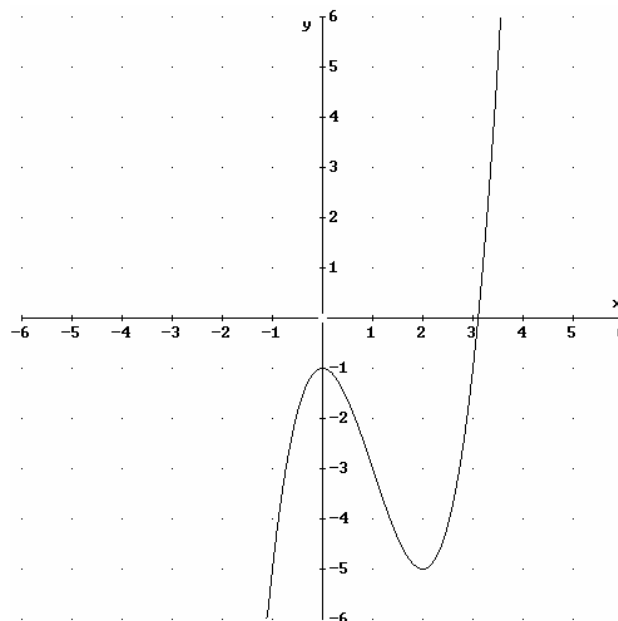
	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $y'$	+	-	+
Función	C	D	C

↓                      ↓  
Máximo  $(0, -1)$     mínimo  $(2, -5)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \text{El punto de inflexión está en } (1, -3)$$

c) Hacemos la representación gráfica.



a) Dada la función  $f(x) = a \cdot (x-1)^2 + bx$ , calcule  $a$  y  $b$  para que la gráfica de esta función pase por el punto de coordenadas  $(1,2)$  y tenga un extremo relativo en el punto de abscisa  $x = 2$ .

b) Calcule  $g''(2)$  siendo  $g(x) = \frac{1}{x} - x$ .

**SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de  $f(x) = a \cdot (x-1)^2 + bx$ .

$$f'(x) = 2a(x-1) + b$$

$$\text{Pasa por } (1,2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{Extremo relativo en } x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

b) Calculamos la segunda derivada de  $g(x) = \frac{1}{x} - x$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1$$

$$g''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow g''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

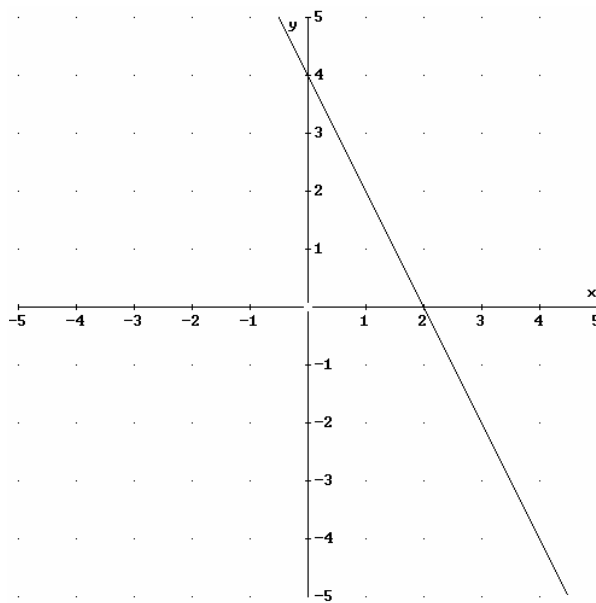
a) De una función  $f$  se sabe que la gráfica de su función derivada,  $f'$ , es la recta de ecuación  $y = -2x + 4$ . Estudie razonadamente la monotonía de la función  $f$ , a la vista de la gráfica de la derivada.

b) Dada la función  $g(x) = \frac{4x-4}{x+4}$ , calcule la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa  $x = 0$ .

**SOCIALES II. 2006. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que  $f'(x)$  es positiva en el intervalo  $(-\infty, 2)$ , luego en ese intervalo  $f(x)$  será creciente.

Vemos que  $f'(x)$  es negativa en el intervalo  $(2, \infty)$ , luego en ese intervalo  $f(x)$  será decreciente.

b) La recta tangente en  $x = 0$  es  $y - g(0) = g'(0) \cdot (x - 0)$

$$g(0) = -1$$

$$g'(x) = \frac{4 \cdot (x+4) - 1 \cdot (4x-4)}{(x+4)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y + 1 = \frac{5}{4} \cdot (x - 0) \Rightarrow 5x - 4y - 4 = 0$

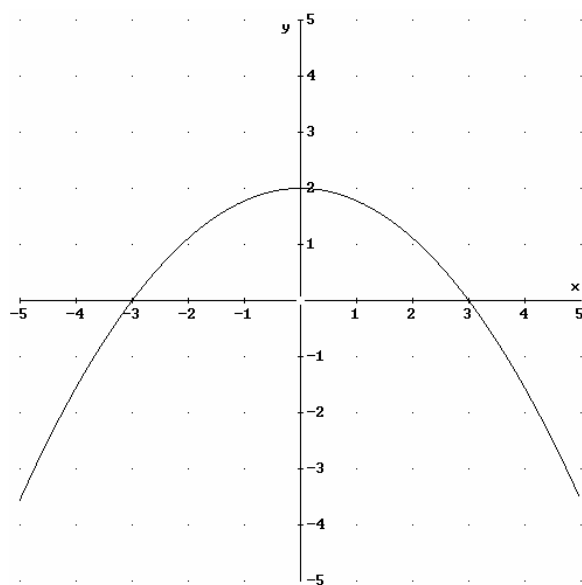
a) La gráfica de la función derivada de una función  $f$  es la parábola de vértice  $(0,2)$  que corta al eje de abscisas en los puntos  $(-3,0)$  y  $(3,0)$ . A partir de dicha gráfica, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f$ .

b) Calcule los extremos relativos de la función  $g(x) = x^3 - 3x$ .

SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

## R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que  $f'(x)$  es positiva en el intervalo  $(-3,3)$ , luego en ese intervalo  $f(x)$  será creciente.

Vemos que  $f'(x)$  es negativa en el intervalo  $(-\infty,-3) \cup (3,\infty)$ , luego en ese intervalo  $f(x)$  será decreciente.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 ; x = -1$$

	( $-\infty, -1$ )	( $-1, 1$ )	( $1, \infty$ )
Signo $g'$	+	-	+
Función	C	D	C

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 Máximo  $(-1, 2)$     mínimo  $(1, -2)$

Se considera la función  $f(x) = \frac{3-x}{2-x}$

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto de abscisa  $x = 1$ .

b) Estudie su monotonía.

c) Calcule sus asíntotas.

**SOCIALES II. 2006. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en  $x = 1$  es  $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

$$f(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (2-x) - (-1) \cdot (3-x)}{(2-x)^2} \Rightarrow f'(1) = 1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos,  $y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow x - y + 1 = 0$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{-1 \cdot (2-x) - (-1) \cdot (3-x)}{(2-x)^2} = \frac{1}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
Signo $f'$	+	+
Función	C	C

Luego la función es creciente en su dominio.

c) *Verticales*: La recta  $x = a$  es una asíntota vertical si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty \Rightarrow x = 2$$

*Horizontales*: La recta  $y = b$  es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x}{2-x} = 1 \Rightarrow y = 1$$

*Oblicuas*: No tiene.