PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2007

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre 3, Ejercicio 2, Opción B

Para la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determine:
a) Su monotonía y sus extremos relativos.
b) Su curvatura y su punto de inflexión.
SOCIALES II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 0 \Rightarrow x = 5 \ ; \ x = 2$$

	$(-\infty, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ $\downarrow$

Máximo $(2, 208)$ mínimo $(5, 100)$

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 48x - 168 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

	$(-\infty, \frac{7}{2})$	$(\frac{7}{2}, \infty)$
Signo y'	–	+
Función	Cn	Cx

$\downarrow$

P.I.$\left(\frac{7}{2}, 154\right)$

a) Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x)=ax^2-b$ en el punto $(1,5)$ sea la recta $y=3x+2$.
b) Para $g(x)=e^{1-x}+L(x+2)$, calcule $g'(1)$.
SOCIALES II. 2007. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta tangente es 3, luego:

$$f'(1)=3 \Rightarrow 2a\cdot 1=3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$$

La función pasa por el punto $(1,5)$, luego:

$$f(1)=5 \Rightarrow a\cdot(1)^2-b=5 \Rightarrow \frac{3}{2}-b=5 \Rightarrow b=-\frac{7}{2}$$

b) Calculamos la derivada: $g'(x)=-1\cdot e^{1-x}+\dfrac{1}{x+2}$, luego:

$$g'(1)=-1\cdot e^{1-1}+\frac{1}{1+2}=-1+\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}$$

a) Sea la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3x+a & si \quad x\le 0 \\ x^2+bx+1 & si \quad x>0 \end{cases}$

Halle *a* y *b* para que la función sea continua y derivable.
b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=\frac{3}{(2x-5)^2}+L(1-x) \quad , \quad h(x)=\frac{e^x}{x^3+1}$$

SOCIALES II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} 2x^2-3x+a=a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+bx+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow a=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 4x-3 & si \quad x\le 0 \\ 2x+b & si \quad x>0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-3 \\ f'(0^+)=b \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow b=-3$$

b)

$$g'(x)=\frac{-2\cdot(2x-5)\cdot 2\cdot 3}{(2x-5)^4}+\frac{-1}{1-x}=\frac{-12}{(2x-5)^3}-\frac{1}{1-x}$$

$$h'(x)=\frac{e^x\cdot(x^3+1)-3x^2\cdot e^x}{(x^3+1)^2}=\frac{e^x(x^3-3x^2+1)}{(x^3+1)^2}$$

a) Determine dónde se alcanza el mínimo de la función $f(x)=3x^2-6x+a$. Calcule el valor de a para que el valor mínimo de la función sea 5.
b) Calcule $g'(3)$, siendo , $g(x)=2x\cdot e^{3x-1}$.
SOCIALES II. 2007. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada e igualamos a cero.

$$f'(x)=6x-6=0\Rightarrow x=1$$

El mínimo está en el punto $(1,5)\Rightarrow 3\cdot 1^2-6\cdot 1+a=5\Rightarrow a=8$

b)

$$g'(x)=2\cdot e^{3x-1}+2x\cdot 3\cdot e^{3x-1}=e^{3x-1}(2+6x)$$

$$g'(3)=e^{3\cdot 3-1}(2+6\cdot 3)=20\cdot e^{8}$$

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+1} & si \quad x\le 0 \\ x^2+2x-3 & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Estudie su derivabilidad en $x = 0$.
b) Determine si existen asíntotas y obtenga sus ecuaciones.
SOCIALES II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x-3}{x+1} = -3 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+2x-3) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \text{ Es continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{(x+1)^2} & si \quad x<0 \\ 2x+2 & si \quad x>0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = 5 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

b)

Asíntota vertical $x=-1$

Asíntota horizontal $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x-3}{x+1} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2}{1} \Rightarrow y=2$

Se considera la función $f(x)=x^3-9x^2+24x$
a) Determine los extremos relativos de f; estudie la monotonía y la curvatura.
b) Represente gráficamente la función f.
SOCIALES II. 2007. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$f'(x)=3x^2-18x+24=0 \Rightarrow x=2 \ ; \ x=4$$

	$(-\infty,2)$	$(2,4)$	$(4,\infty)$
Signo $f'(x)$	+	–	+
Función $f(x)$	C	D	C

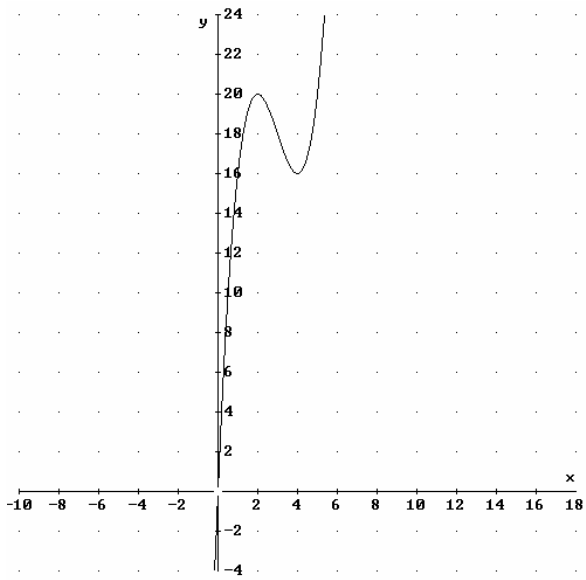
$\downarrow$ Máximo (2,20) $\downarrow$ mínimo (4,16)

$$f''(x)=6x-18=0 \Rightarrow x=3$$

	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$
Signo $f''(x)$	–	+
Función $f(x)$	Cn	Cx

$\downarrow$ P.I. (3,18)

b)



Se considera la función definida por $f(x)=\begin{cases} 2x^2-8x+6 & si \quad x\le 1 \\ -2x^2+8x-6 & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de f.
b) Represente la gráfica de f.
c) Indique los extremos relativos de la función.
SOCIALES II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

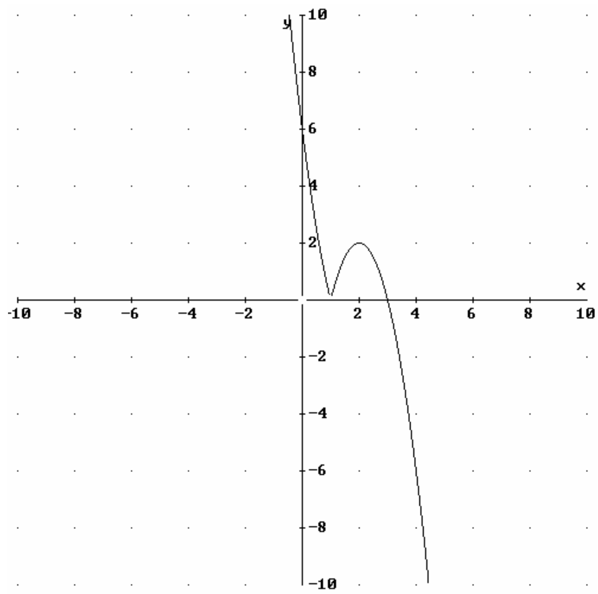
a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2-8x+6=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} -2x^2+8x-6=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow \text{ Es continua}$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 4x-8 & si \quad x<1 \\ -4x+8 & si \quad x>1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-4 \\ f'(1^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

b)



c) Máximo en $(2,2)$, Pico en $(1,0)$.

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-k}{x+1} & si \quad x>0 \\ x^2+2x+1 & si \quad x\le 0 \end{cases}$

a) Calcule el valor de *k* para que la función *f* sea continua en *x* = 0. Para ese valor de *k* , ¿es *f* derivable en *x* =0?

b) Para *k* = 0, calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ***y*** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

SOCIALES II. 2007. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} x^2+2x+1=1 \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x-k}{x+1}=-k \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow k=-1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x>0 \\ 2x+2 & si \quad x\le 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=2 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)\ne f'(0^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=0$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{\infty}{\infty}=1$

$\lim_{x\to-\infty} (x^2+2x+1)=\infty$

El beneficio obtenido por una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$f(x)=\begin{cases} -5x^2+40x-60 & si \quad 0\le x\le 6 \\ \dfrac{5x}{2}-15 & si \quad 6<x\le 10 \end{cases}$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.

a) Represente la función f.

b) Calcule el gasto en publicidad a partir del cual la empresa no tiene pérdidas.

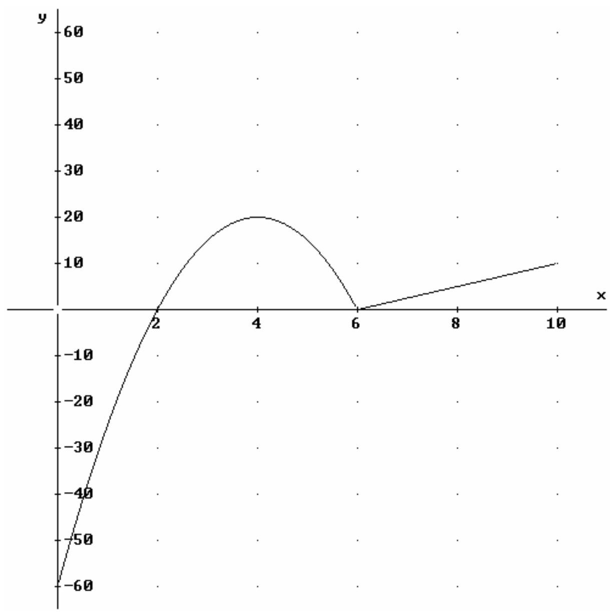
c) ¿Para qué gastos en publicidad se producen beneficios nulos?

d) Calcule el gasto en publicidad que produce máximo beneficio. ¿Cuál es ese beneficio máximo?

SOCIALES II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



b) A partir de 2.000 € la empresa no tiene pérdidas.

c) Para 2.000 € y 6.000 €.

d) Para 4.000 € de gastos en publicidad se produce el máximo beneficio que es 20.000 €.

a) La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ tiene un extremo relativo en x = 2 y un punto de inflexión en x = 3. Calcule los coeficientes a y b y determine si el citado extremo es un máximo o un mínimo relativo.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = \frac{x}{x-2}$ en el punto de abscisa x = 3.

SOCIALES II. 2007. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)

- Extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12$

- Punto de inflexión en $x = 3 \Rightarrow f''(3) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 3 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -18$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a = -9$; $b = 24$

Como $f''(2) = 12 - 18 = -2 < 0 \Rightarrow$ Es un máximo

b) La recta tangente en $x = 3$ es $y - g(3) = g'(3) \cdot (x - 3)$

$$g(3) = 3$$

$$g'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} \Rightarrow g'(3) = -2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 3 = -2 \cdot (x - 3) \Rightarrow y = -2x + 9$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por: $f(x)=\begin{cases} 2^x & si \quad x\le 1 \\ x^2+mx+5 & si \quad x>1\end{cases}$

a) Calcule *m* para que la función sea continua en $x=1$.
b) Para ese valor de *m*, ¿es derivable la función en $x=1$?
c) Calcule la ecuación la recta tangente a la gráfica de *f* en $x=0$.
SOCIALES II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+mx+5)=6+m\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} 2^x = \lim_{x\to 1^+}(x^2+mx+5) \Rightarrow 2=6+m \Rightarrow m=-4$$

b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2^x\cdot\ln 2 & si \quad x<1 \\ 2x-4 & si \quad x>1\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2\ln 2 \\ f'(1^+)=-2\end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\ne f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

c) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=1$$

$$f'(x)=2^x\ln 2 \Rightarrow f'(0)=\ln 2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=\ln 2\cdot(x-0)$

a) Sea la función definida para todo número real x por $f(x)=ax^3+bx$. Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,1)$ y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es -3.

b) Si en la función anterior $a=\frac{1}{3}$ y $b=-4$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

SOCIALES II. 2007. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

Pasa por $(1,1) \Rightarrow f(1)=1 \Rightarrow a+b=1$

Pendiente $-3 \Rightarrow f'(1)=-3 \Rightarrow 3a+b=-3$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=-2$; $b=3$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$f'(x)=x^2-4=0 \Rightarrow x=2$; $x=-2$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $\left(-2,\frac{16}{3}\right)$ $\downarrow$ mínimo $\left(2,-\frac{16}{3}\right)$