PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2008

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre 3, Ejercicio 2, Opción B

Sea la función definida de la forma $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & si \quad x<2 \\ 2x^2-10x & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Halle el dominio de *f*.
b) Estudie la derivabilidad de *f* en $x=2$**.**
c) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$**.**
SOCIALES II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Dominio $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) Estudiamos primero la continuidad en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x}{x-1}=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(2x^2-10x)=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)\neq \lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow$$ No es continua en $x=2$, por lo tanto, no es

derivable en $x=2$

c) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=0$$
$$f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(0)=-2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=-2\cdot(x-0)\Rightarrow y=-2x$

Sea la función *f* definida mediante $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \quad x<1 \\ L(x) & si \quad x\geq 1\end{cases}$

a) Determine *a* y *b* sabiendo que *f* es continua y tiene un mínimo en $x=-1$.
b) Para $a=-1$ y $b=1$, estudie la derivabilidad de *f* en $x=-1$ y en $x=1$.
SOCIALES II. 2008. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Por ser continua se cumple:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} x^2+ax+b=1+a+b \\ &\lim_{x\to 1^+} L(1)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1$$

mínimo en $x=-1 \Rightarrow f'(-1)=0 \Rightarrow -2+a=0$

Resolviendo, tenemos que: $a=2$; $b=-3$

b) La función que tenemos es: $f(x)=\begin{cases} x^2-x+1 & si \quad x<1 \\ L(x) & si \quad x\geq 1\end{cases}$

Estudiamos primero la continuidad en $x=1$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} x^2-x+1=1 \\ &\lim_{x\to 1^+} L(1)=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1\neq 0 \Rightarrow \text{ No es continua, por lo tanto, tampoco es derivable.}$$

Como la función que tenemos en $x=-1$ es polinómica, la función es continua y derivable en $x=-1$.

Sea la función f definida mediante $f(x)=\dfrac{x+1}{2x-1}$
a) Determine los puntos de corte con los ejes.
b) Estudie su curvatura.
c) Determine sus asíntotas.
d) Represente la función.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Corte con el eje X $\Rightarrow y=0\Rightarrow \dfrac{x+1}{2x-1}=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow(-1,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\dfrac{1}{-1}=-1\Rightarrow(0,-1)$

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(2x-1)-2\cdot(x+1)}{(2x-1)^2}=\frac{-3}{(2x-1)^2}=0\Rightarrow \text{ No tiene solución}$$

	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},\infty\right)$
Signo f'	$-$	$-$
Función	D	D

Luego la función es decreciente en su dominio.

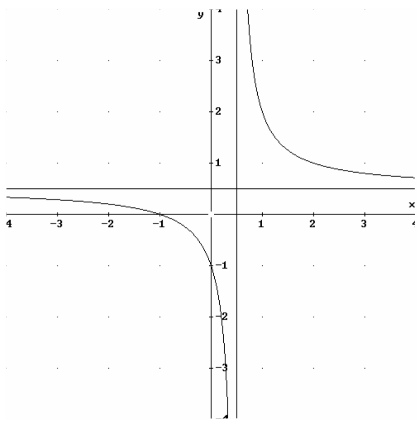
c) *Verticales*: La recta $x=a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty\Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)=\infty\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

Horizontales: La recta $y=b$ es una asíntota horizontal si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$$

Oblicuas: No tiene.



a) La gráfica de la derivada de una función *f* es la recta que pasa por los puntos $(0,-3)$ y $(4,0)$. Estudie la monotonía de la función *f*

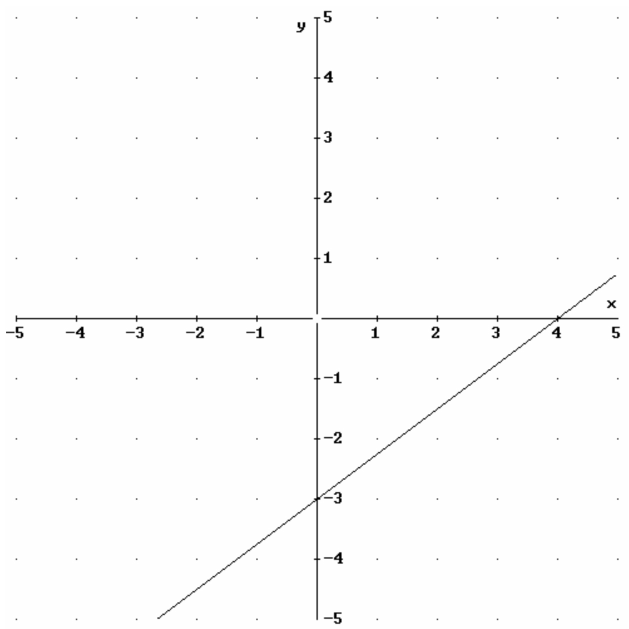
b) Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x)=(3x+1)^3\cdot L(x^2+1) \quad ; \quad h(x)=\frac{e^x}{7x^5-4}$$

SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos la representación gráfica de la función derivada.



Vemos que $f'(x)$ es positiva en el intervalo $(4,\infty)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será creciente.

Vemos que $f'(x)$ es negativa en el intervalo $(-\infty,4)$, luego en ese intervalo $f(x)$ será decreciente.

b)

$$g'(x)=3\cdot(3x+1)^2\cdot 3x+\frac{2x}{x^2+1}(3x+1)^3$$

$$h'(x)=\frac{e^x(7x^5-4)-35x^4\cdot e^x}{(7x^5-4)^2}$$

El beneficio de una empresa, en miles de euros, viene dado por la función

$$B(x) = -3x^2 + 120x + 675 \quad ; \quad x \geq 0$$

donde x representa el gasto en publicidad, en miles de euros.
a) Calcule el gasto a partir del cual la empresa no obtiene beneficios.
b) Calcule el valor de x que produce máximo beneficio. ¿Cuánto es ese beneficio?
c) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento del beneficio de la empresa.
d) Represente gráficamente la función B.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación

$$0 = -3x^2 + 120x + 675 \Rightarrow x = 45$$

Luego, a partir de 45.000 € no obtiene beneficios.

b) El vértice es $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{120}{-6} = 20$

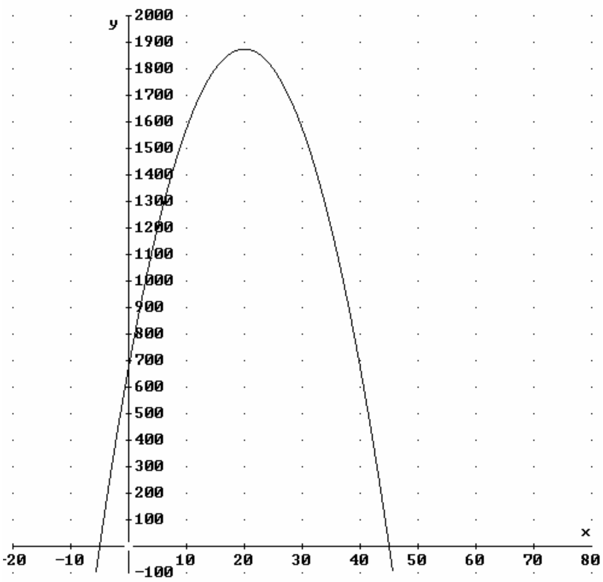
Luego, el máximo beneficio se obtiene para $x = 20.000$ €

c) Calculamos la derivada de la función:

$$B'(x) = -6x + 120 \ ; \ B'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 120 = 0 \Rightarrow x = 20$$

	$(0,20)$	$(20,\infty)$
Signo $B'(x)$	+	−
Función $B(x)$	C	D

d)



Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^3+1)\cdot e^{7x}$

b) $g(x)=3^x\cdot Ln(x)$

c) $h(x)=(x^2+1)\cdot(x^5-6x)^6$

d) $i(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-2}$

SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x)=3x^2\cdot e^{7x}+7\cdot e^{7x}\cdot(x^3+1)$

b) $g'(x)=3^x\cdot Ln3\cdot Ln(x)+\dfrac{1}{x}\cdot 3^x$

c) $h'(x)=2x\cdot(x^5-6x)^6+6\cdot(x^5-6x)^5(5x^4-6)(x^2+1)$

d) $i'(x)=\dfrac{2\cdot(x+1)\cdot(x^2-2)-2x\cdot(x+1)^2}{(x^2-2)^2}$

Sea la función $f(x)=x^3-6x^2$.
a) Determine sus puntos de corte con los ejes.
b) Calcule sus extremos relativos y su punto de inflexión.
c) Represente gráficamente la función.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

Corte con el eje X $\Rightarrow x^3-6x^2=0 \Rightarrow x=0$; $x=6 \Rightarrow (0,0)$; $(6,0)$

Corte con el eje Y $\Rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$

b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=3x^2-12x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=4$$

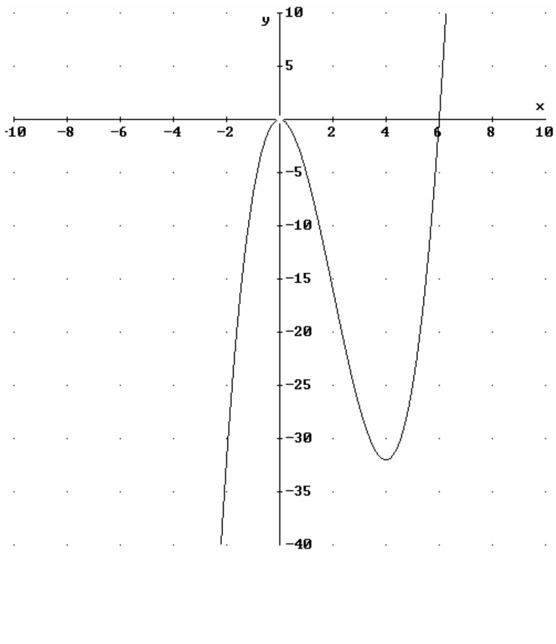
	$(-\infty,0)$	$(0,4)$	$(4,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,0)$ $\downarrow$ mínimo $(4,-32)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x)=6x-12=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \text{El punto de inflexión está en } (2,-16)$$

c) Hacemos la representación gráfica.



Sea la función $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & si \quad x\le 1 \\ ax+b & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Calcule ***a*** **y** ***b*****, sabiendo que** $f(2)=7$ **y que** ***f*** **es continua en** $x=1$**.**

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de ***f*** **en el punto de abscisa** $x=-1$**.**

SOCIALES II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+4=5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b \end{array}\right\} \Rightarrow 5=a+b$$

$$f(2)=7 \Rightarrow 2a+b=7$$

Resolviendo el sistema sale: $a=2$; $b=3$

b) La recta tangente en $x=-1$ es $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

$$f(-1)=5$$

$$f'(x)=2x \Rightarrow f'(-1)=-2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-5=-2\cdot(x+1)\Rightarrow y=-2x+3$

Sea la función $f(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x\le 0 \\ x^2+x+1 & si \quad x>0 \end{cases}$.

a) ¿Es *f* continua en $x=0$ **? ¿Es continua en su dominio?.**
b) ¿Es *f* derivable en $x=0$ **? ¿Es derivable en su dominio?.**
c) Estudie la monotonía de *f*.
SOCIALES II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+x+1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow \text{ Es continua en } x=0$$

La función es continua en su dominio, ya que e^x y x^2+x+1 son continuas.

b) Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x<0 \\ 2x+1 & si \quad x>0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=1 \\ f'(0^+)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow \text{Es derivable en } x=0$$

La función es derivable en su dominio, ya que e^x y x^2+x+1 son derivables.

c)

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & si \quad x<0 \\ 2x+1 & si \quad x>0 \end{cases} \Rightarrow e^x=0 \Rightarrow No \ ; \ 2x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2} \Rightarrow No$$

	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Signo y'	+	+
Función	C	C

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\frac{2}{x}$ en el punto de abscisa 1.

b) Sea la función $g(x)=x^3+ax^2+b$. Calcule *a* y *b* sabiendo que su gráfica presenta un punto de inflexión en el punto $(2,5)$.

SOCIALES II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=2$$

$$f'(x)=\frac{-2}{x^2}\Rightarrow f'(1)=-2$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-2=-2\cdot(x-1)\Rightarrow y=-2x+4$

b)

- Pasa por $(2,5)\Rightarrow f(2)=5\Rightarrow 8+4a+b=5\Rightarrow 4a+b=-3$

- Punto de inflexión en $x=2\Rightarrow f''(2)=0\Rightarrow 6\cdot 2+2a=0\Rightarrow 2a=-12$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a=-6$; $b=21$

a) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=\frac{3}{x}$ en el punto de abscisa $x=-1$.

b) Halle los valores de a y b para que la función $g(x)=ax+\frac{b}{x}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1,2)$.

SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=-1$ es $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

$$f(-1)=-3$$

$$f'(x)=\frac{-3}{x^2}\Rightarrow f'(-1)=-3$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+3=-3\cdot(x+1)\Rightarrow y=-3x-6$

b)

- Extremo relativo en $x=1\Rightarrow g'(1)=0\Rightarrow a-\frac{b}{1^2}=0\Rightarrow a-b=0$

- Pasa por $(1,2)\Rightarrow g(1)=2\Rightarrow a+b=2$

Resolviendo el sistema, tenemos que: $a=1$; $b=1$

Dada la función $f(x)=4-3x^2+x^3$, determine:
a) La monotonía y la curvatura de f.
b) Los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.
c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$.
SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a y b) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo y'	+	–	+
Función	C	D	C

$\downarrow$ Máximo $(0,4)$ $\downarrow$ mínimo $(2,0)$

b) La recta tangente en $x=-1$ es $y-f(-1)=f'(-1)\cdot(x+1)$

$$f(-1)=0$$

$$f'(x)=3x^2-6x \Rightarrow f'(-1)=9$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+0=9\cdot(x+1)\Rightarrow y=9x+9$