PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2012

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

a) Sea la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+3x & si \ \ x\le 2 \\ x^2-bx-4 & si \ \ x>2 \end{cases}$

Determine los valores de *a* y *b*, para que la función *f* sea derivable en $x=2$ **.**

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ **en el punto de abscisa** $x=0$ **.**

SOCIALES II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} ax^2+3x=4a+6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x^2-bx-4=-2b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a+6=-2b \Rightarrow 4a+2b=-6$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2ax+3 & si \ \ x<2 \\ 2x-b & si \ \ x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4a+3 \\ f'(2^+)=4-b \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow 4a+3=4-b \Rightarrow 4a+b=1$$

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones: $\left.\begin{array}{l} 4a+2b=-6 \\ 4a+\ \ b=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2 \ ; \ b=-7$

b) Vamos a calcular la recta tangente.

$g(0)=-2$

$$g'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+2)}{(x-1)^2} \Rightarrow m=g'(0)=-3$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente, tenemos:

$$y-g(0)=g'(0)\cdot(x-0) \Rightarrow y+2=-3(x-0) \Rightarrow y=-3x-2$$

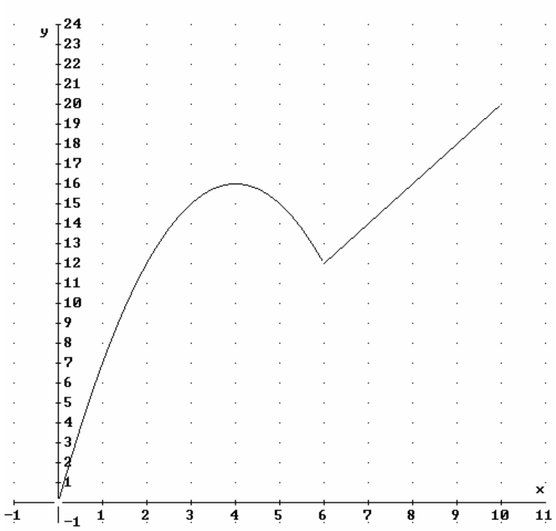
Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viene dado por la función $B(t)=\begin{cases} at-t^2 & si \;\; 0 \le t \le 6 \\ 2t & si \;\; 6 < t \le 10 \end{cases}$ **, siendo t el tiempo transcurrido en años.**
a) Calcule el valor del parámetro *a* para que *B* sea una función continua.
b) Para $a = 8$ **represente su gráfica e indique en qué períodos de tiempo la función crecerá o decrecerá.**
c) Para $a = 8$ **indique en qué momento se obtiene el máximo beneficio en los primeros 6 años y a cuánto asciende su valor.**
SOCIALES II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $t = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 6^-} at - t^2 = 6a - 36 \\ \lim\limits_{t \to 6^+} 2t = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to 6^-} B(t) = \lim_{t \to 6^+} B(t) \Rightarrow 6a - 36 = 12 \Rightarrow a = 8$$

b) Hacemos la gráfica de la función:



Vemos que la función es creciente en: $(0,4) \cup (6,10)$ y decreciente en: $(4,6)$

c) El máximo beneficio en los 6 primeros años se alcanza para $t = 4$ y vale 16 millones de euros

De la función *f* se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$
a) Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.
b) Sabiendo que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$, calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.
SOCIALES II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1 \; ; \; x = \frac{5}{3}$$

	$(-\infty,1)$	$\left(1,\frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3},\infty\right)$
Signo f'	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,1) \cup \left(\frac{5}{3},\infty\right)$ y decreciente en el intervalo: $\left(1,\frac{5}{3}\right)$.

Tiene un máximo en el punto $x = 1$ y un mínimo en $x = \frac{5}{3}$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

$$f''(x) = 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

	$\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$	$\left(\frac{4}{3},\infty\right)$
Signo f''	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$ y convexa en $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$. Tiene un punto de inflexión en $x = \frac{4}{3}$

b) La ecuación de la tangente es: $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y - 1 = 0(x-1) \Rightarrow y = 1$

a) Dada la función $f(x)=2x^2+ax+b$, determine los valores de a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1,3)$ y alcanza un extremo en $x=-2$
b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)=3x^2-2x+1$, en el punto de abscisa $x=1$.
SOCIALES II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

Pasa por $(1,3)\Rightarrow 2\cdot 1^2+a\cdot 1+b=3\Rightarrow a+b=1$

Extremo en $x=-2\Rightarrow f'(-2)=0\Rightarrow 4\cdot(-2)+a=0\Rightarrow a=8$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos que: $b=-7$

b) La ecuación de la tangente es: $y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)$

$g(1)=3\cdot 1^2-2\cdot 1+1=2$

$g'(x)=6x-2\Rightarrow g'(1)=6\cdot 1-2=4$

Sustituyendo, tenemos que:

$$y-g(1)=g'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-2=4(x-1)\Rightarrow y=4x-2$$

a) Para la función *f* definida de la forma $f(x)=\dfrac{ax}{x+b}$, determine, razonadamente, los valores de *a* y *b* sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x=-2$ y como asíntota horizontal la de ecuación $y=3$.

b) Para la función *g*, definida de la forma $g(x)=x^3-3x^2+2$, determine: su dominio, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y sus extremos relativos. Con esos datos haga un esbozo de su gráfica.

SOCIALES II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si igualamos el denominador a cero, obtenemos la asíntota vertical, luego:

$$x+b=0\Rightarrow x=-b=-2\Rightarrow b=2$$

Si calculamos el límite de la función cuando *x* tiende a ∞, obtenemos la asíntota horizontal, luego:

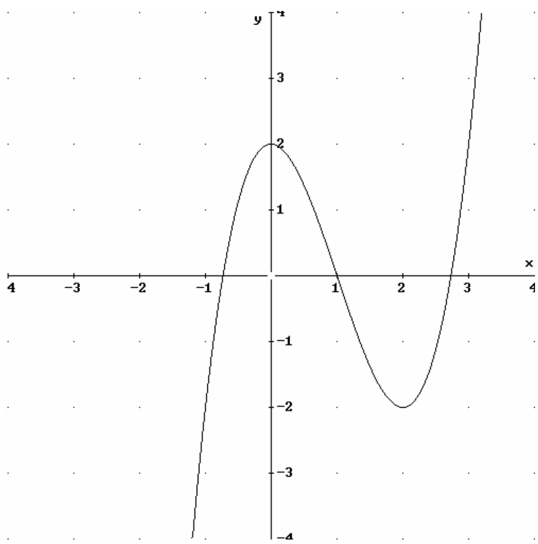
$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax}{x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}=a\Rightarrow a=3$$

b) Su dominio es $\mathbb{R}$, ya que es una función polinómica. Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$g'(x)=3x^2-6x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2$$

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Signo $g'(x)$	+	–	+
Función	C	D	C

Máximo $(0,2)$ Mínimo $(2,-2)$



Sea la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-2x & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{x}{2}-b & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Calcule *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en $x=1$
b) Represente gráficamente la función para $a=1.5$ y $b=0.5$
SOCIALES II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

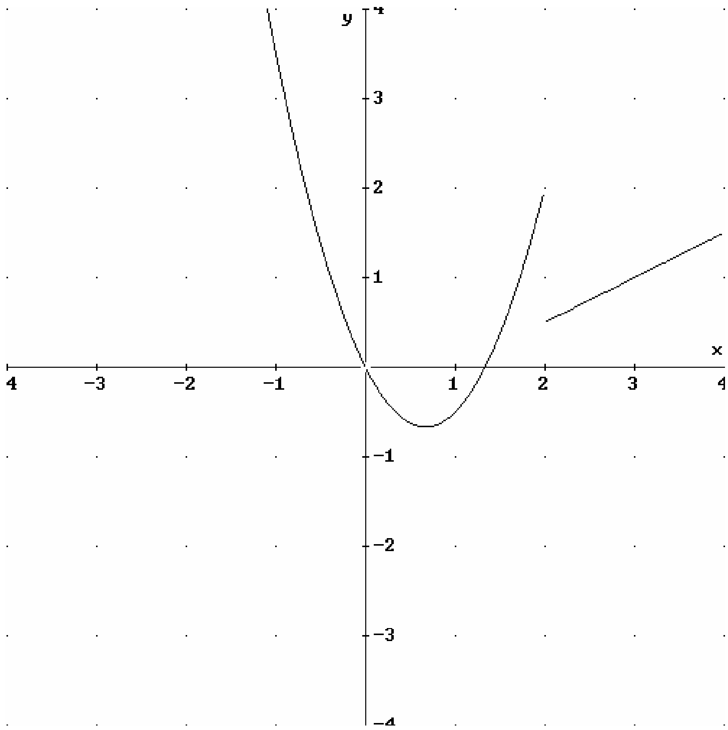
a) Para que sea continua se debe cumplir que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} ax^2-2x=4a-4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x}{2}-b=1-b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 4a-4=1-b \Rightarrow 4a+b=5$$

Si tiene un mínimo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 2a\cdot 1-2=0 \Rightarrow a=1$

Sustituyendo en la otra ecuación, tenemos que: $b=1$

b) Hacemos la gráfica de la función: $f(x)=\begin{cases} 1'5x^2-2x & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{x}{2}-0'5 & si \quad x>2 \end{cases}$



Se considera la función $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+2}$
a) Determine la monotonía y curvatura de la función
b) Calcule sus asíntotas
c) Represéntela gráficamente.
SOCIALES II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Su dominio es $\mathbb{R} - \{-2\}$. Calculamos la derivada y la igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow No$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

La función es creciente en su dominio.
Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero.

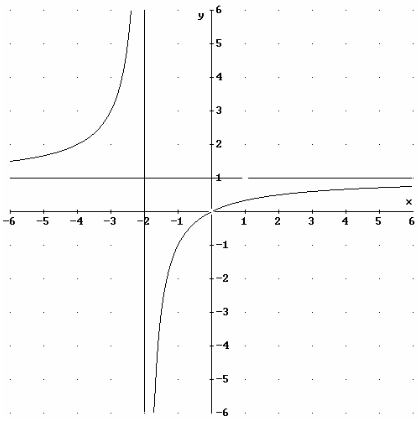
$$f''(x) = -\frac{4}{(x+2)^3} = 0 \Rightarrow No$$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
Signo $f''(x)$	+	$-$
Función	Cx	Cn

b) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{x}{x+2}$

La recta $x = -2$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim\limits_{x \to -2} -\dfrac{2}{x+2} = \infty$

La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x+2} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$



Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo *t*, medido en meses: $P(t)=\begin{cases} t^2 & si \quad 0\le t\le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & si \quad t>5 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad de la función *P*.
b) Estudie la derivabilidad de *P* en $t=5$.
c) Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.
d) ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?.
SOCIALES II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en sólo en $t=5$, ya que t^2 es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en $0\le t\le 5$; y la función $\dfrac{100t-250}{t+5}$ es continua en $\mathbb{R}-\{-5\}$ y en particular en $t>5$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 5^-} t^2=25 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{100t-250}{t+5}=25 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 5^-} = \lim_{x\to 5^+} = P(5) \Rightarrow \text{ Es continua}$$

b) Calculamos la función derivada: $P'(t)=\begin{cases} 2t & si \quad 0<t<5 \\ \dfrac{750}{(t+5)^2} & si \quad t>5 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} P'(5^-)=10 \\ P'(5^+)=7'5 \end{array}\right\} \Rightarrow P'(5^-)\ne P'(5^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } t=5$$

c) Estudiamos la monotonía.

$2t=0\Rightarrow t=0$. La función es creciente en $0\le t\le 5$, ya que $P'(1)=+$. En $t=0$ tiene un mínimo absoluto o relativo.

$\dfrac{750}{(t+5)^2}=0\Rightarrow NO$. La función es creciente en $t>5$, ya que $P'(6)=+$

La función es siempre creciente, por lo tanto, el porcentaje de células afectadas crece con el tiempo.

d) $\dfrac{100t-250}{t+5}=50\Rightarrow 100t-250=50t+250\Rightarrow 50t=500\Rightarrow t=10$. Luego, a los 10 meses el porcentaje de células afectadas es 50.

Sean dos funciones, *f* y *g*, tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, $f'(x)=x+2$ y $g'(x)=2$
a) Estudie la monotonía de las funciones *f* y *g*.
b) De lasa dos funciones *f* y *g* , indique, razonadamente, cuál de ellas tiene algún punto en el que su derivada es nula.
c) ¿Cuál de las funciones *f* y *g* es una función polinómica de primer grado? ¿Por qué?.
SOCIALES II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos la derivada a cero.

$$f'(x)=x+2=0\Rightarrow x=-2$$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,\infty)$
Signo $f'(x)$	$-$	$+$
Función	D	C

La función tiene un mínimo relativo en $x=-2$
Igualamos la derivada a cero.

$$g'(x)=2=0\Rightarrow NO$$

La función es creciente ya que $g'(x)>0$

b) Solamente la función f tiene derivada nula, ya que tiene un mínimo relativo en $x=-2$.

c) La función g es una función polinómica de primer grado ya que al hacer la derivada queda un número.

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{3x}\cdot\ln(2x-5)$

b) $g(x)=\dfrac{3^{2x}}{x^2-1}$

c) $h(x)=(3x^2+5x-1)^6+x^2-\ln x$

SOCIALES II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x)=3e^{3x}\cdot\ln(2x-5)+e^{3x}\cdot\dfrac{2}{2x-5}$

b) $g'(x)=\dfrac{2\cdot 3^{2x}\cdot\ln 3(x^2-1)-2x\cdot 3^{2x}}{(x^2-1)^2}$

c) $h'(x)=6\cdot(3x^2+5x-1)^5\cdot(6x+5)+2x-\dfrac{1}{x}$

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+ax-7 & si \quad x<1 \\ 4x-b & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$ **sea derivable en $\mathbb{R}$.**

SOCIALES II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2+ax-7=-1+a-7=a-8 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 4x-b=4-b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)\Rightarrow a-8=4-b\Rightarrow a+b=12$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -2x+a & si \quad x<1 \\ 4 & si \quad x>1 \end{cases}$ y como:

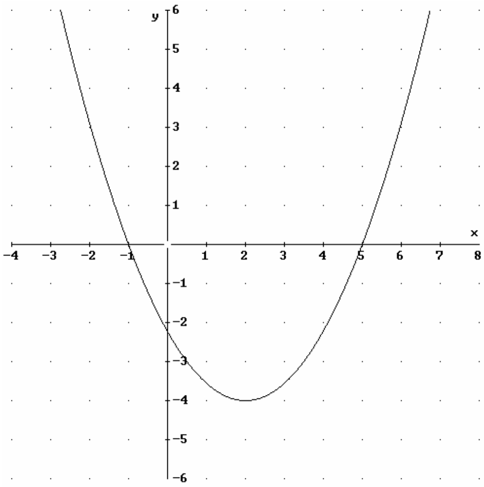
$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=-2+a \\ f'(1^+)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow -2+a=4\Rightarrow a=6$$

Luego, los valores son: $a=6$; $b=6$

Sea $f(x)$ una función cuya función derivada, $f'(x)$, tiene por gráfica una parábola que corta al eje OX en los puntos $(-1,0)$ y $(5,0)$ y con vértice $(2,-4)$.
a) Estudie razonadamente la monotonía de $f(x)$.
b) Determine las abscisas de los extremos relativos de la función $f(x)$.
c) Halla la ecuación de la recta tangente a la grafica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$, sabiendo que $f(2)=5$.
SOCIALES II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Esbozamos la gráfica con los datos que nos dan:



a) Viendo la gráfica se deduce que:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,5)$	$(5,\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función $f(x)$	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,-1)\cup(5,\infty)$ y decreciente en el intervalo: $(-1,5)$.

b) Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x=-1$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x=5$.

c) La recta tangente en $x=2$, es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$.

- $f(2)=5$
- $f'(2)=-4$

Sustituyendo, tenemos: $y-5=-4\cdot(x-2)\Rightarrow y=-4x+13$