PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2013

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 6: TEORÍA DE MUESTRAS

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Se quiere estimar la proporción de hembras entre los peces de una piscifactoría; para ello se ha tomado una muestra aleatoria de 500 peces, y en ella hay 175 hembras.
a) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de hembras en esta población de peces, con un nivel de confianza del 94%.
b) A la vista del resultado del muestreo se quiere repetir la experiencia para conseguir un intervalo de confianza con el mismo nivel y un error máximo de 0.02, ¿cuál es el tamaño mínimo que debe tener la nueva muestra?.
SOCIALES II. 2013 JUNIO. EJERCICIO 4 OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\, ,\, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{175}{500} = 0'35$$

$$\frac{1+0'94}{2} = 0'97 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'88$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'35 - 1'88 \cdot \sqrt{\frac{0'35 \cdot 0'65}{500}}\, ,\, 0'35 + 1'88 \cdot \sqrt{\frac{0'35 \cdot 0'65}{500}}\right) = (0'3099; 0'3901)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'02 = 1'88\sqrt{\frac{0'35 \cdot 0'65}{n}} \Rightarrow n = \frac{1'88^2 \cdot 0'35 \cdot 0'65}{0'02^2} = 2010'19 \simeq 2011$$

El tiempo que los españoles dedican a ver la televisión los domingos es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal de media desconocida y desviación típica 75 minutos. Elegida una muestra aleatoria de españoles se ha obtenido, para la media de esa distribución, el intervalo de confianza (188'18, 208'82), con un nivel del 99%.
a) Calcule la media muestral y el tamaño de la muestra.
b) Calcule el error máximo permitido si se hubiese utilizado una muestra de 500 y un nivel de confianza del 96%.
SOCIALES II. 2013 JUNIO. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\frac{1+0'99}{2}=0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'575$$

Calculamos la media: $\mu=\dfrac{188'18+208'82}{2}=198'5$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E=208'82-198'5=10'32=2'575\frac{75}{\sqrt{n}} \Rightarrow n=350'2 \simeq 351$$

b)

$$\frac{1+0'96}{2}=0'98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'055$$

$$E=2'055\frac{75}{\sqrt{500}}=6'89$$

En una población próxima a un puerto deportivo se quiere estimar la proporción de habitantes que navegan al menos una vez a la semana. Se toma una muestra, al azar, de 400 habitantes de la población, de los que 160 afirman navegar al menos una vez en semana.
a) Halle el intervalo de confianza del 90% para la proporción de habitantes que navegan al menos una vez en semana.
b) A la vista del resultado, se pretende repetir la experiencia para conseguir una cota del error de 0'1 con el mismo nivel de confianza del apartado anterior. ¿Cuántos individuos debe tener al menos la muestra?
SOCIALES II. 2013 RESERVA 1. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \,,\, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{160}{400} = 0'4$$

$$\frac{1+0'90}{2} = 0'95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'4 - 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0'4\cdot 0'6}{400}} \,, 0'4 + 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0'4\cdot 0'6}{400}} \right) = (0'3598; 0'4402)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'1 = 1'645\sqrt{\frac{0'4\cdot 0'6}{n}} \Rightarrow n = \frac{1'645^2 \cdot 0'4 \cdot 0'6}{0'1^2} = 64'94 \simeq 65$$

Queremos estudiar la proporción de personas de una población que acceden a internet a través de teléfono móvil. Para ello hacemos una encuesta a una muestra aleatoria de 400 personas de esa población, y obtenemos que 240 de ellas acceden a internet a través del móvil.
a) Determine un intervalo de confianza, al 98.5%, para la proporción de personas de esa población que acceden a internet a través del teléfono móvil.
b) Razone el efecto que tendría sobre la amplitud del intervalo de confianza el aumento o disminución del tamaño de la muestra, suponiendo que se mantuvieran la misma proporción muestral y el mismo nivel de confianza.
SOCIALES II. 2013 RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$p = \frac{240}{400} = 0'6$$

$$\frac{1+0'985}{2} = 0'9925 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'43$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(0'6 \pm 2'43\sqrt{\frac{0'6 \cdot 0'4}{400}} \right) = \left(0'6 \pm 0'0595\right) = \left(0'5405; 0'6595\right)$$

b) Cuanto mayor sea el tamaño de la muestra, menor será la amplitud del intervalo. Cuanto menor sea el tamaño de la muestra, mayor será la amplitud de intervalo.

a) Una población de 6000 personas se ha dividido en 3 estratos, uno con 1000 personas, otro con 3500 y otro con 1500. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 15 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.
b) Dada la población $\{1,4,7\}$, construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que puedan formarse mediante muestreo aleatorio simple, y halle la varianza de las medias muestrales de todas esas muestras.
SOCIALES II. 2013 RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular el tamaño de la muestra: $\left.\begin{array}{l} 1500 \to 15 \\ 6000 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 60$ personas tiene la muestra

Calculamos la composición de la muestra: $\left.\begin{array}{l} 6000 \to 1000 \\ 60 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 10$ personas del primer estrato

$\left.\begin{array}{l} 6000 \to 3500 \\ 60 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 35$ personas del segundo estrato

$\left.\begin{array}{l} 6000 \to 1500 \\ 60 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 15$ personas del tercer estrato

b) Escribimos todas las muestras posibles de tamaño 2.

(1,1) (1,4) (1,7)
(4,1) (4,4) (4,7)
(7,1) (7,4) (7,7)

Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
1	1	1	1
2’5	2	5	12’5
4	3	12	48
5’5	2	11	60’5
7	1	7	49
	9	36	171

Media = $\mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{36}{9} = 4$

Varianza = $\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{171}{9} - 4^2 = 3$

El peso de los sobres de café que fabrica una empresa sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 0.3 g. Se quiere construir un intervalo de confianza para estimar dicha media, con un nivel de confianza del 98%, y para ello se toma una muestra de 9 sobres.
a) ¿Qué amplitud tendrá dicho intervalo?
b) ¿Cómo afectaría a dicha amplitud un aumento del tamaño de la muestra, manteniendo el mismo nivel de confianza?
c) Obtenga el intervalo de confianza sabiendo que los pesos, en gramos, de los sobres de la muestra son: 7 , 7.1 , 7 , 6.93 ,7.02 ,7 , 7.01 , 6.5 , 7.1
SOCIALES II. 2013 RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el nivel de confianza es del 98%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'98}{2}=0'99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'33$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C.=(\mu \pm 2'33\cdot\frac{0'3}{\sqrt{9}})=(\mu-0'233\ ;\ \mu+0'233)$$

Luego la amplitud del intervalo es: $2\cdot 0'233=0'466$

b) Como el tamaño de la muestra está en el denominador, si aumentamos el tamaño de la muestra, la amplitud del intervalo será menor.

c) Calculamos la media:

$$\mu=\frac{7+7'1+7+6'93+7'02+7+7'01+6'5+7'1}{9}=6'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C.=(6'96\pm 2'33\cdot\frac{0'3}{\sqrt{9}})=(6'96-0'233\ ;\ 6'96+0'233)=(6,727\ ;\ 7,193)$$

Se conoce que la acidez de una solución es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 0.2. Se ha tomado una muestra aleatoria de cinco soluciones y se han obtenido las siguientes medidas de la acidez:

7.92 , 7.95 , 7.91 , 7.9 , 7.94.

a) Halle el intervalo de confianza, al 99%, para la media poblacional.
b) ¿Qué error máximo se ha cometido en el intervalo anterior?
c) Para el mismo nivel de confianza, calcule el tamaño mínimo muestral que permita reducir el error anterior a la mitad.
SOCIALES II. 2013 RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media:

$$\mu = \frac{7'92 + 7'95 + 7'91 + 7'9 + 7'94}{5} = 7'924$$

Como el nivel de confianza es del 99%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1 + 0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (7'924 \pm 2'575 \cdot \frac{0'2}{\sqrt{5}}) = (7'6937 \ ; 8'1543)$$

b) El error que hemos cometido es:

$$E = 2'575 \cdot \frac{0'2}{\sqrt{5}} = 0'2303$$

c) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = \frac{0'2303}{2} = 2'575 \cdot \frac{0'2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'575 \cdot 0'2 \cdot 2}{0'2303} \right)^2 = 20$$

a) Se considera la población $\{2,4,6\}$. Escriba todas las posibles muestras de tamaño dos elegidas mediante muestreo aleatorio simple y determine la desviación típica de las medias muestrales.
b) En una ciudad se seleccionó una muestra aleatoria de 500 alumnos de Bachillerato a los que se les preguntó si poseían una determinada marca de teléfono móvil, resultando que 80 de ellos contestaron afirmativamente. Obtenga un intervalo de confianza, al 92%, para estimar la proporción de estudiantes de Bachillerato que poseen esa marca de teléfono móvil.
SOCIALES II. 2013 RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos todas las muestras posibles de tamaño 2.

(2,2) (2,4) (2,6)
(4,2) (4,4) (4,6)
(6,2) (6,4) (6,6)

Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	2	10	50
6	1	6	36
	9	36	156

Media = $\mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{36}{9} = 4$ Desviación típica = $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2} = \sqrt{\dfrac{156}{9} - 4^2} = 1'15$

b) Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{80}{500} = 0'16$$

$$\frac{1+0'92}{2} = 0'96 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'76$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'16 - 1'76 \cdot \sqrt{\frac{0'16 \cdot 0'84}{500}}, 0'16 + 1'76 \cdot \sqrt{\frac{0'16 \cdot 0'84}{500}}\right) = (0'1312; 0'1888)$$

El gasto mensual de las familias de un municipio se distribuye según una variable Normal con desviación típica igual a 180 euros. Seleccionadas 30 familias al azar, han tenido un gasto medio mensual de 900 euros.
a) Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio mensual de las familias de ese municipio con un nivel de confianza del 98%.
b) Calcule el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el medio mensual de las familias con un error no superior a 60 euros, con el mismo nivel de confianza.
SOCIALES II. 2013 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4 OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $\frac{1+0'98}{2}=0'99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'33$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C.=(900 \pm 2'33 \cdot \frac{180}{\sqrt{30}})=(823'429 \ ; \ 976'571)$$

b)

$$E=60=2'33\,\frac{180}{\sqrt{n}} \Rightarrow n=48'86 \simeq 49$$