OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (1 punto) Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema:
"Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 638000 pta. Su precio original era de 1200 pta por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30% del precio original y otra parte con un descuento del 40%. Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 1200 pta, calcular cuantas camisetas se vendieron a cada precio."
b) (2 puntos) Resuelva el sistema formado por las ecuaciones:

$$x - 2y - 3z = 1; \quad x - 4y - 5z = 1; \quad -2x + 2y + 4z = -2$$

Solución

a)
Plantee, sin resolver, el sistema de ecuaciones necesario para dar solución al siguiente problema:
"Un comerciante ha vendido 600 camisetas por un total de 638000 pta. Su precio original era de 1200 pta por camiseta, pero ha vendido en las rebajas una parte de ellas con un descuento del 30% del precio original y otra parte con un descuento del 40%. Sabiendo que el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 1200 pta, calcular cuantas camisetas se vendieron a cada precio."

x = Número de camisetas vendidas a 1200 pta.
y = Número de camisetas vendidas con descuento del 30% de 1200 pta = 1200-1200·(30/100) = 840 pta.
z = Número de camisetas vendidas con descuento del 40% de 1200 pta = 1200-1200·(40/100) = 720 pta.

De "Un comerciante ha vendido 600" $\rightarrow$ $x + y + z = 600$.
De "por un total de 638000 pta" $\rightarrow$ $1200x + 840y + 720z = 638000$.
De "el número total de camisetas rebajadas fue la mitad del número de las que vendió a 1200 pta" $\rightarrow$ $y + z = x/2$.

El sistema pedido es: $\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 1200x + 840y + 720z = 638000 \\ y + z = x/2 \end{cases}$ o $\begin{cases} x + y + z = 600 \\ 30x + 21y + 18z = 15950 \\ -x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$

b)
Resuelva el sistema formado por las ecuaciones:

$$x - 2y - 3z = 1; \quad x - 4y - 5z = 1; \quad -2x + 2y + 4z = -2$$

Lo resolvemos por el método de Gauss, poniendo su matriz asociada.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 + 2F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, por tanto nuestro sistema asociado es $\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ -2y-2z=0 \end{cases}$, tomando $z = \lambda \in R$ tenemos $y = -\lambda$ y $x = 1+2(-\lambda)+3\lambda = 1 + \lambda$, es decir **la solución es $(x,y,z) = (1 + \lambda,-\lambda,\lambda)$ con** $\lambda \in R$, es decir es un sistema compatible e indeterminado, y tiene infinitas soluciones.

EJERCICIO 2_A

Calcule las funciones derivadas de las siguientes funciones, simplificando su expresión cuando sea posible:
a) (1 punto) $f(x) = (1 - 3x)/x^3$ para $x \neq 0$.
b) (1 punto) $g(x) = (1/3)\cdot\ln(4x)$ para $x > 0$.
c) (1punto) $h(x) = \cos(x)\cdot\text{sen}(x)$ para $x \in R$.

Solución

Calcule las funciones derivadas de las siguientes funciones, simplificando su expresión cuando sea posible:
a) $f(x) = (1 - 3x)/x^3$ para $x \neq 0$. b) $g(x) = (1/3)\cdot\ln(4x)$ para $x > 0$. c) $h(x) = \cos(x)\cdot\text{sen}(x)$ para $x \in R$

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación.

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$; $(\text{sen}(x))' = \cos(x)$; $(\cos(x))' = -\text{sen}(x)$; $(k)' = 0$.

a)

$f(x) = \frac{1-3x}{x^3}$ para $x \neq 0$ $\rightarrow$ $f'(x) = \frac{-3(x^3)-(1-3x)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{-3x^2+6x^3}{x^6} = \frac{x^2(-3+6x)}{x^6} = \frac{-3+6x}{x^4}$ para $x \neq 0$

b)

$g(x) = (1/3)\cdot\ln(4x)$ para $x > 0$ $\rightarrow$ $g'(x) = (1/3)\cdot(1/4x)\cdot(4) = 1/3x$ para $x > 0$.

c)

$h(x) = \cos(x)\cdot\text{sen}(x)$ para $x \in R$ $\rightarrow$ $h'(x) = -\text{sen}(x)\cdot\text{sen}(x) + \cos(x)\cdot\cos(x) = -\text{sen}^2(x) + \cos^2(x)$ para $x \in R$

EJERCICIO 3_A

Parte 1

Se dispone de una baraja española de 40 cartas. Se saca una carta al azar y, sin devolverla a la baraja, se saca otra, también al azar.

a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que ninguna de las cartas extraídas sea una figura (es decir, ni sota, ni caballo, ni rey).

b) (1 punto) Sabiendo que la segunda carta extraída no ha sido una figura, calcule la probabilidad de que tampoco lo fuera la primera.

Solución

Se dispone de una baraja española de 40 cartas. Se saca una carta al azar y, sin devolverla a la baraja, se saca otra, también al azar.

a)

Calcule la probabilidad de que ninguna de las cartas extraídas sea una figura (es decir, ni sota, ni caballo, ni rey).

Sean F_1 y F_2 a los sucesos "elegir figura en primer lugar" y "elegir figura en segundo lugar". Figuras hay 12 de 40 y no figura hay 28 de 40

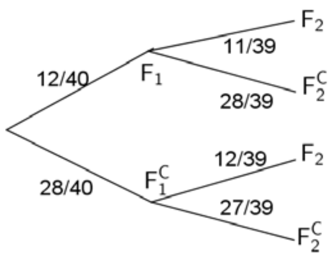
Me piden sin devolverla a la baraja **p(no elegir figuras) =** $p(F_1^C)\cdot p(F_2^C/F_1^C) = (28/40)\cdot(27/39) = 63/130 \cong$

$\cong$ **0'48462.**

b)

Sabiendo que la segunda carta extraída no ha sido una figura, calcule la probabilidad de que tampoco lo fuera la primera.

Todo esto lo vemos mejor en un diagrama de árbol (recordamos que las probabilidades que salen desde un mismo nodo suman 1)



Utilizando La fórmula de Bayes y el Teorema de la Probabilidad Total tenemos:

Me piden $\mathbf{p(F_1^C/F_2^C) =} \frac{p(F_1^C \cap F_2^C)}{p(F_2^C)} = \frac{p(F_1^C)\cdot p(F_2^C/F_1^C)}{p(F_1)\cdot p(F_2^C/F_1) + p(F_1^C)\cdot p(F_2^C/F_1^C)} =$

$= \frac{(28/40)\cdot(27/39)}{(12/40)\cdot(28/39)+(28/40)\cdot(27/39)} = 9/13 \cong$ **0'69231.**

EJERCICIO 3_A

Parte 2

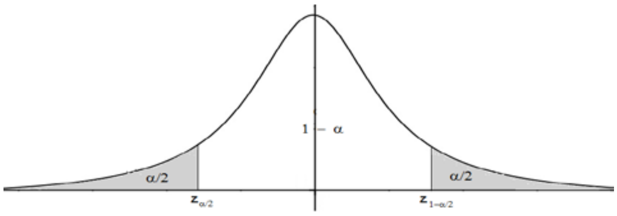
Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal con desviación típica 90000 pta. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos 9 meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 466300 y 583900 pta,

a) (0'5 puntos) ¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos 9 meses?

b) (1'5 puntos) ¿Cual es el nivel de confianza de este intervalo?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma}{b - a}\right)^2$.

Las ventas mensuales de una tienda de electrodomésticos se distribuyen según una ley normal con desviación típica 90000 pta. En un estudio estadístico de las ventas realizadas en los últimos 9 meses, se ha encontrado un intervalo de confianza para la media mensual de las ventas, cuyos extremos son 466300 y 583900 pta,

a)

¿Cuál ha sido la media de las ventas en estos 9 meses?

Datos del problema: $\sigma = 90000$, $n = 9$, intervalo de confianza = (466300,583900) =

$$= \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b).$$

Sabemos que $a + b = 2 \cdot \overline{x}$, luego $\overline{x}$ **=** $(a + b)/2 = (466300 + 583900)/2$ **= 525100**.

b)

¿Cual es el nivel de confianza de este intervalo?

Sabemos que el nivel de confianza es "1 - α".

De la fórmula $b - a = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $117600 = 2 \cdot z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{90000}{\sqrt{9}}$, es decir $z_{1-\alpha/2} =$

$$= \frac{117600}{60000} = \frac{29}{45} = 1'96.$$

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = p(Z \le 1'96) = 0'975$, es decir $1 - 0'975 = \alpha/2$, luego $\alpha = 0'05$, y el **nivel de confianza pedido es 1 - α =** 1 - 0'05 = **0'95 = 95%**

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

a) (1 punto) Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$x \le 6; \quad y \le 8; \quad x + 2y \ge 10; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0$$

b) (1 punto) Calcule sus vértices.

c)(1 punto) Calcule el máximo de la función F(x,y) = 20x + 60y en dicho recinto.

Solución

a) b) y c)

Dibuje el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones: $x \le 6$; $y \le 8$; $x + 2y \ge 10$; $x \ge 0$; $y \ge 0$**.** Halle sus vértices. Calcule el máximo de la función F(x,y) = 20x + 60y en dicho recinto**.**

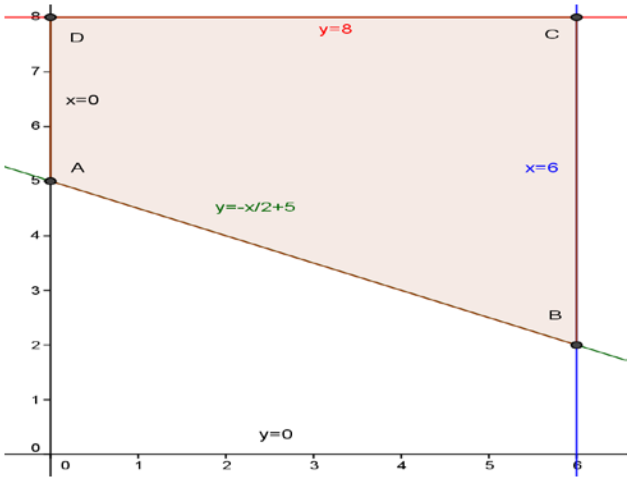
Función Objetivo F(x,y) = 20x + 60y.

Las desigualdades $x \le 6$; $y \le 8$; $x + 2y \ge 10$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, x = 6; y = 8; x + 2y = 10; x = 0; y = 0.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

x = 6; y = 8; y = -x/2 + 5; x = 0; y = 0.

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = -x/2+5, tenemos y = 5, y el punto de corte es A(0,5)
De x = 6 e y = -x/2+5, tenemos y = 2, y el punto de corte es B(6,2)
De x = 6 e y = 8, tenemos el punto de corte es C(6,8).
De x = 0 e y = 8, tenemos el punto de corte es D(0,8).

Vemos que el polígono convexo cerrado tiene por vértices los puntos: A(0,5), B(6,2), C(6,8) y D(0,8).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 15x + 12y en dicha región convexa.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada convexa, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,5), B(6,2), C(6,8) y D(0,8). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,5) = 20(0) + 60(5) = 300; F(6,2) = 20(6) + 60(2) = 240;
F(6,8) = 20(6) + 60(8) **= 600**; F(0,8) = 20(0) + 60(8) = 480.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 600** (el mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice C(6,8).**

EJERCICIO 2_B

Los dueños de un manantial de agua mineral calculan que, si venden cada botella de agua a un precio de x pta, tendrán una ganancia diaria (en miles de pesetas): $g(x) = -x^2/10 + 25x - 1500$
a) (2 puntos) Represente gráficamente la función g(x).
b) (0'5 puntos) ¿Cuál es el precio con el que se alcanza el máximo de ganancia?
c) (0'5 puntos) ¿Cuál es la ganancia máxima diaria que puede obtenerse?

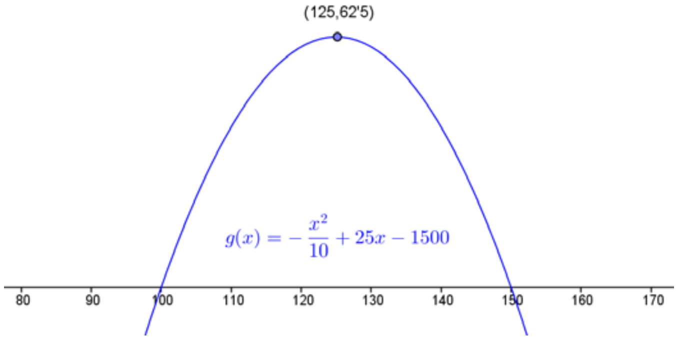
Solución

Los dueños de un manantial de agua mineral calculan que, si venden cada botella de agua a un precio de x pta, tendrán una ganancia diaria (en miles de pesetas): $g(x) = -x^2/10 + 25x - 1500$
a)
Represente gráficamente la función g(x).

La gráfica de la función $g(x) = -x^2/10 + 25x - 1500$ es un parábola, con las ramas hacia abajo ($\cap$), pues el nº que multiplica a x^2 es negativo, y la abscisa de dicho vértice es la solución de g'(x) = 0 =
= $(-x^2/10 + 25x - 1500)' = 0$, es decir $-2x/10 + 25 = 0$, de donde sale x = 125, por tanto el vértice es V(125,g(125)) = V(-125,62'5). Puntos de corte con los ejes coordenados en (0,g(0)) = (0,-1500), y de g(x) = 0 tenemos $-x^2/10 + 25x - 1500 \rightarrow x^2 - 250x + 15000 = 0$.

Resolviendo $x = \dfrac{250 \pm \sqrt{250^2 - 4\cdot 15000}}{2} = \dfrac{250 \pm 50}{2}$, de donde x = 100 y x = 150, con lo cual los puntos de corte con el eje OX son (100,0) y (150,0).

Teniendo en cuenta lo anterior, un esbozo de la gráfica de g(x) es :



b) y c)
¿Cuál es el precio con el que se alcanza el máximo de ganancia? ¿Cuál es la ganancia máxima diaria que puede obtenerse?

Sabemos que en una parábola de la forma ($\cap$) el vértice (125,62'5) es el máximo relativo y absoluto, por tanto **el precio donde se alcanza el máximo es x = 125 pta.**, **y la ganancia máxima es de 62500 ptas**.

EJERCICIO 3_B

Parte 1

La probabilidad de que un conductor no lleve la rueda de repuesto es 0'13 y la de que no lleve lámparas de repuesto es 0'37. Se sabe que el 60% de los conductores llevan ambos repuestos.
a) (1 punto) Calcule la probabilidad de que un conductor no lleve alguno de los dos repuestos señalados.
b) (1 punto) ¿Son independientes los sucesos "llevar rueda de repuesto" y "llevar lámparas de repuesto"?

Solución

La probabilidad de que un conductor no lleve la rueda de repuesto es 0'13 y la de que no lleve lámparas de repuesto es 0'37. Se sabe que el 60% de los conductores llevan ambos repuestos.
a)
Calcule la probabilidad de que un conductor no lleve alguno de los dos repuestos señalados.

Llamamos R, L, R^C y L^C, a los sucesos "llevar rueda de repuesto", "llevar rueda de repuesto", "no llevar rueda de repuesto" y "no leer ningún periódico".

Del problema tenemos $p(R^C) = 0'13$, $p(L^C) = 0'37$, p(lleva rueda y lleva luces) = $p(R\cap L)$ = 60% = 0'6.

Sabemos que $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$; $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$; $p(B) = 1 - p(B^C)$; A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$; A es independiente de B si $p(A) = p(A/B)$; $p(A^C) = 1 – p(A)$
$p(A^C\cap B^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(A\cup B)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(A\cup B)$; $p(A\cap B^C) = p(A) - p(A\cap B)$.

Me piden **p(no lleva rueda ó no lleva luces) = $p(R^C\cup L^C)$**
De $p(R^C) = 0'13 \rightarrow p(R) = 1 - p(R^C) = 1 - 0'13 = 0'87$; $p(L^C) = 0'37 \rightarrow p(L) = 1 - p(L^C) = 1 - 0'37 = 0'63$,
luego $p(\mathbf{R^C\cup L^C})$ = {Ley de Morgan} = $p(R\cap L)^C$ = {suceso contrario} = $1 - p(R\cap L) = 1 - 0'6$ **= 0'4.**
b)
¿Son independientes los sucesos "llevar rueda de repuesto" y "llevar lámparas de repuesto"?

Sabemos que A y B son independientes si $p(A\cap B) = p(A)\cdot p(B)$
Como **$p(R\cap L) = 0'6 \neq p(R)\cdot p(L)$** = 0'87·0'63 = **0'5481, R y L no son independientes.**

EJERCICIO 3_B

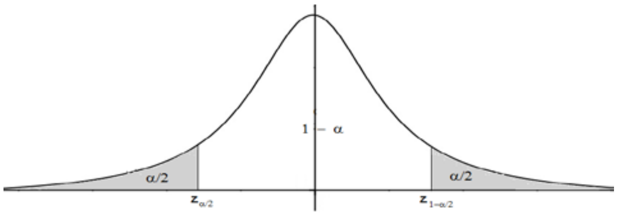
Parte 2

La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1'75 metros. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0'16\ m^2$.
a) (1 punto) Construya un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.
b) (1 punto) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera

media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la media es $\overline{x} = (a + b)/2$, el error máximo de la estimación es $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es $b - a = 2\cdot z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2\cdot E$, de donde $E = (b - a)/2$, por tanto el tamaño mínimo de la muestra es $n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

La media de las estaturas de una muestra aleatoria de 400 personas de una ciudad es 1'75 metros. Se sabe que la estatura de las personas de esa ciudad es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza σ^2 = 0'16 m^2.

a)

Construya un intervalo, de un 95% de confianza, para la media de las estaturas de la población.

Datos del problema: σ^2 = 0'16; σ = 0'4, n = 400, $\overline{x}$ = 1'75, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1'75 - 1'96\cdot\frac{0'4}{\sqrt{400}}, 1'75 + 1'96\cdot\frac{0'4}{\sqrt{400}}\right) = \mathbf{(1'7108, 1'7892)}.$$

b)

¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de las estaturas está a menos de 2 cm de la media muestral, con una confianza del 90%?

Datos del problema: Datos del problema: σ = 0'4, Error = E radio intervalo = 2 cm. = 0'02 m., nivel de confianza = 90% =
= 0'90 = 1 - α, de donde α = 0'10, es decir α/2 = 0'10/2 = 0'05.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'05 = 0'95. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'95 no viene, las más próximas son 0'9495 y 0'9505 que corresponden a 1'64 y 1'65, por tanto $z_{1-\alpha/2}$ es la media es decir $z_{1-\alpha/2}$ = (1'64 + 1'65)/2 = 1'645, por tanto tenemos:

De $E = z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, tenemos $0'02 = 1'645\cdot\frac{0'4}{\sqrt{n}}$, de donde $n \ge \left(\frac{1'645\cdot 0'4}{0'02}\right)^2$ = 1082'41, por tanto **el tamaño mínimo es n = 1083**.