OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

a) (2 puntos) Una heladería prepara helados de tres tamaños, 125 gr, 250 gr y 500 gr, cuyos precios son 150 pta, 270 pta y 495 pta, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2’5 Kg, y paga por ellos 2670 pta. Se desea conocer el número de helados que ha comprado de cada tipo.

1.- Formule el sistema de ecuaciones asociado al enunciado del problema.

2.- Halle el número de helados que se lleva de cada tipo.

b) (1 punto) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, halle A^{200}.

Solución

a)

Una heladería prepara helados de tres tamaños, 125 gr, 250 gr y 500 gr, cuyos precios son 150 pta, 270 pta y 495 pta, respectivamente. Un cliente compra 10 helados, con un peso total de 2’5 Kg, y paga por ellos 2670 pta. Se desea conocer el número de helados que ha comprado de cada tipo.

1.- Formule el sistema de ecuaciones asociado al enunciado del problema.

2.- Halle el número de helados que se lleva de cada tipo.

x = Número de helados de 125 gr.
y = Número de helados de 250 gr.
z = Número de helados de 500 gr.

De “*compra 10 helados*” $\rightarrow$ **x + y + z = 10**.

De “de 125 gr. A 150 pta, de 250 gr. a 270 pta, de 500 gr. a 495 pta, con un *peso total de 2’5 Kg*”
$\rightarrow$ **125x + 250y + 500z = 2500**.

De ““de 125 gr. a150 pta, de 250 gr a270 pta, de 500 g a 495 pta, *paga por ellos 2670 pta*”
$\rightarrow$ **150x + 270y + 495z = 2670**.

El sistema pedido es: $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 125x + 250y + 500z = 2500 \\ 150x + 270y + 495z = 2670 \end{cases}$ o $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 4z = 20 \\ 10x + 18y + 33z = 178 \end{cases}$

Halle el número de helados que se lleva de cada tipo.

Resolvemos el sistema $\begin{cases} x + y + z = 10 \\ x + 2y + 4z = 20 \\ 10x + 18y + 33z = 178 \end{cases}$ por el método de Gauss, poniendo su matriz asociada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 20 \\ 10 & 18 & 33 & 178 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 10F_1 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 8 & 23 & 78 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ F_3 - 8F_2 \end{matrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$, por tanto nuestro sistema

asociado es $\begin{cases} x+y+z=10 \\ y+3z=10 \\ -z=-2 \end{cases}$, el cual un sistema compatible y determinado, y tiene por soluciones:

De -z = -2, tenemos z = 2.
De y + 3(2) = 10, tenemos y = 4.
De x + (4) + (2) = 10, tenemos x = 4. Por tanto **la solución es (x,y,z) = (4,4,2), es decir** se lleva **4 helados de 125 gr., 4 helados de 250 gr. y 2 helados de 500 gr.**.

b)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, halle A^{200}.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, por $A^{200} = A^{2\cdot(100)} = \left(A_2\right)^{100} = (I_2)^{100} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2_A

Sea la función $f(x) = \dfrac{320x+25}{2x+5}$

a) (1 punto) Estudie la continuidad de f y calcule su función derivada f’.

b) (0’5 puntos) Razone si existen o no extremos relativos de la función f.

c) (1'5 puntos) Calcule las asíntotas de dicha función.

Solución

Sea la función $f(x) = \dfrac{320x+25}{2x+5}$

a) b) y c)

Estudie la continuidad de f y calcule su función derivada f'. Razone si existen o no extremos relativos de la función f. Calcule las asíntotas de dicha función.

Tenemos $f(x) = \dfrac{320x+25}{2x+5}$, cuya gráfica es una hipérbola y sabemos tiene una asíntota vertical (A.V.) y una asíntota horizontal (A.H) ques es la misma en $\pm\infty$ por ser cociente de funciones polinómicas; y que no tiene extremos. Vamos a verlo.

Dominio = R - {2x + 5 = 0} = R - {-5/2}.

Sabemos que las funciones racionales (nuestro caso) son continuas y derivables en todo R – {números que anulan el denominador} = R - {-5/2}. **Luego f es continua y derivable en R - {-5/2}.**

Veamos su función derivada.

$f(x) = \dfrac{320x+25}{2x+5}$, $f'(x) = \dfrac{320(2x+5) - 2(320x+25)}{(2x+5)^2} = \dfrac{1550}{(2x+5)^2}$

Sabemos que los extremos relativos anulan la primera derivada, pero de f'(x) = 0, tenemos 1550 = 0, lo cual es absurdo, por tanto f no tiene extremos. Veamos su monotonía.

De $f'(-5) = \dfrac{1550}{(2(-5)+5)^2} = 62 > 0$, tenemos que f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,-5/2)$.

De $f'(0) = \dfrac{1550}{(2(0)+5)^2} = 62 > 0$, tenemos que f es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(5/2,+\infty)$.

Luego f siempre es estrictamente creciente en su dominio y no tiene extremos ni absolutos ni relativos.

Asíntotas:

El número que anula el denominador (2x+5 = 0) es x = -5/2, y como $\lim_{x\to -5/2+} \dfrac{320x+25}{2x+5} = \dfrac{320(-5/2)+25}{2(-5/2)+5} =$

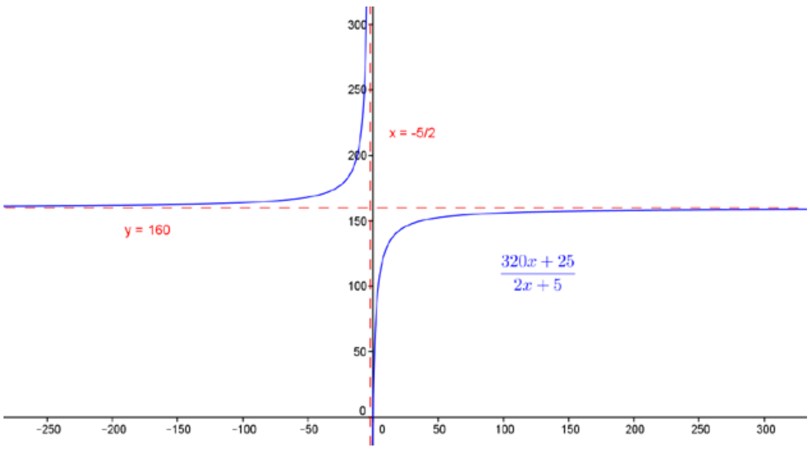
$= (-775)/0^- = +\infty$, **la recta x = -5/2 es una asíntota vertical de f***.*

Como $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{320x+25}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} (320x/2x) = \lim_{x\to+\infty} (320/2) = 160$, **la recta y = 160 es una asíntota horizontal de f en $\pm\infty$ (en las funciones racionales la asíntota horizontal, si existe, es la misma en $\pm\infty$).**

De $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{320x+25}{2x+5} - 160\right) = 0^+$, tenemos que f está por encima de la A.H. y = 160 en $-\infty$.

De $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - A.H.) = \lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{320x+25}{2x+5} - 160\right) = 0^-$, tenemos que f está por debajo de la A.H. y = 160 en $+\infty$.

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de f es:



EJERCICIO 3_A

Parte I

(2 puntos) Disponemos de 3 urnas y de 10 bolas, 5 blancas y 5 negras. Distribuimos las bolas de la

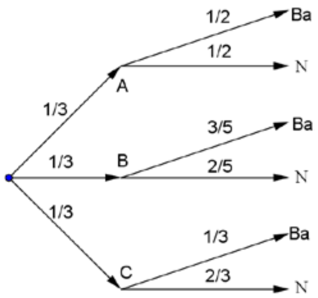
siguiente manera:
En la 1ª urna ponemos 1 bola blanca y 1 bola negra.
En la 2º urna ponemos 3 bolas blancas y 2 bolas negras.
En la 3ª urna ponemos 1 bola blanca y 2 bolas negras.
De una de las urnas, elegida al azar, se extrae una bola. Halle la probabilidad de que la bola elegida sea negra.

Solución

Disponemos de 3 urnas y de 10 bolas, 5 blancas y 5 negras. Distribuimos las bolas de la siguiente manera:
En la 1ª urna ponemos 1 bola blanca y 1 bola negra.
En la 2º urna ponemos 3 bolas blancas y 2 bolas negras.
En la 3ª urna ponemos 1 bola blanca y 2 bolas negras.
De una de las urnas, elegida al azar, se extrae una bola. Halle la probabilidad de que la bola elegida sea negra.

Llamemos A, B, C, Ba y N, a los sucesos siguientes, "urna 1ª", "urna 2ª", "urna 3ª", "bola blanca" y "bola negra", respectivamente.

Datos del problema p(A) = p(B) = p(C) = 1/3, p(Ba/A) = 1/2, p(N/A) = 1/2, p(Ba/B) = 3/5, p(N/B) = 2/5, p(Ba/C) = 1/3, p(N/C) = 2/3.
Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el Teorema de la probabilidad Total
p(bola negra) = **p(N) =** p(A)·p(N/A) + p(B)·p(N/B) + p(C)·p(N/C) =
= (1/3)·(1/2) + (1/3)·(2/5) + (1/3)·(2/3) **= 47/90 ≅ 0'52222.**

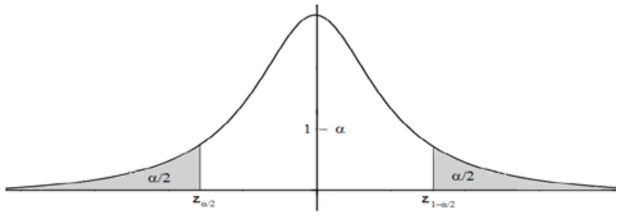
EJERCICIO 3_A

Parte 2

(2 puntos) Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es 90 horas. Tomada una muestra de tamaño 100 se ha encontrado que la media de la duración de las bombillas ha sido 1200 horas. Determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la duración media de las bombillas.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.\ (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (a,b)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que la <u>media</u> es $\overline{x}$ = (a + b)/2, el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para* *el intervalo de la media. Pero la amplitud del intervalo es b – a = 2·* $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *= 2·E, de donde E = (b – a)/2,*

por tanto el <u>*tamaño mínimo*</u> *de la muestra es n =* $\left(\dfrac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2=\left(\dfrac{2\cdot z_{1-\alpha/2}.\sigma}{b-a}\right)^2$.

Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de las bombillas es 90 horas. Tomada una muestra de tamaño 100 se ha encontrado que la media de la duración de las bombillas ha sido 1200 horas. Determine un intervalo, con el 95% de confianza, para la duración media de las bombillas.

Datos del problema: σ = 90; n = 100, $\overline{x}$ = 1200, nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, es decir α/2 = 0'05/2 = 0'025.
De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975. Mirando en las tablas de la N(0,1) vemos que la probabilidad 0'975 viene, y que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C.}(\mu) = \left(\overline{x}-z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1200 - 1'96\cdot\frac{90}{\sqrt{100}},1200 + 1'96\cdot\frac{90}{\sqrt{100}}\right) =$$

= (1182'36, 1217'64).

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Un agricultor cosecha garbanzos y lentejas. Se sabe que, a lo sumo, solo se pueden cosechar 500 toneladas métricas (Tm), de las que como máximo 200 Tm son lentejas. Los beneficios por Tm de garbanzos y lentejas son de 50000 pta y 30000 pta respectivamente, y desea planificar la producción para optimizar el beneficio total.
a) (1 punto) Formule el sistema de inecuaciones asociado al enunciado del problema y la función objetivo del mismo.
b) (1 punto) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.
c) (1 punto) ¿Cuantas Tm de garbanzos y cuantas de lentejas debe cosechar para obtener el máximo beneficio?

Solución

Un agricultor cosecha garbanzos y lentejas. Se sabe que, a lo sumo, solo se pueden cosechar 500 toneladas métricas (Tm), de las que como máximo 200 Tm son lentejas. Los beneficios por Tm de garbanzos y lentejas son de 50000 pta y 30000 pta respectivamente, y desea planificar la producción para optimizar el beneficio total.
a) b) y c)
Formule el sistema de inecuaciones asociado al enunciado del problema y la función objetivo del mismo. Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices. ¿Cuántas Tm de garbanzos y cuantas de lentejas debe cosechar para obtener el máximo beneficio?

"x" = Número de toneladas métricas (Tm) de garbanzos.
"y" = Número de toneladas métricas (Tm) de lentejas.

Función Objetivo F(x,y) = 50000x + 30000y.
(Los beneficios por Tm de garbanzos y lentejas son de 50000 pta y 30000 pta respectivamente).

Restricciones:

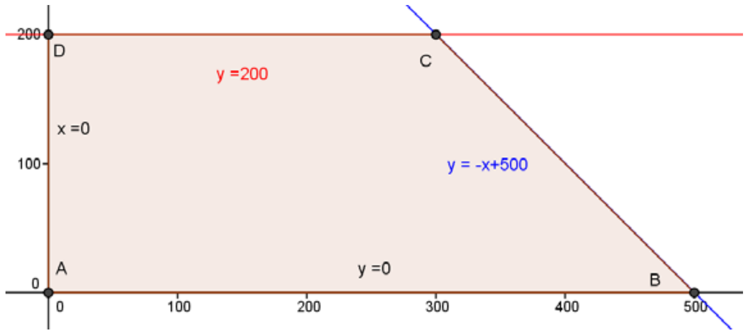
Solo se pueden cosechar 500 toneladas métricas (Tm)	$\rightarrow$ $x + y \le 500$
Como máximo 200 Tm son lentejas	$\rightarrow$ $y \le 200$
Se cosecha alguna Tm de garbanzos y de lentejas	$\rightarrow$ $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Las desigualdades $x + y \le 500$; $y \le 200$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya sus gráficas son rectas, $x + y = 500$; $y = 200$; $x = 0$; $y = 0$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -x + 500;\ \ y = 200;\ \ x = 0;\ \ y = 0.$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto convexo limitado por las inecuaciones, que será la región factible; en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto convexo, resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e   y = 0, tenemos el punto de corte es A(0,0)
De y = 0 e   y = -x+500, tenemos 0 = -x+500 → x = 500, y el punto de corte es B(500,0)
De y = -x+500 e   y = 200, tenemos -x+500 = 200 → 300 = x, y el punto de corte es C(300,200)
De x = 0 e   y = 200, tenemos el punto de corte es C(0,200)

Vemos que el polígono tiene por vértices los puntos: A(0,0), B(500,0), C(300,200) y D(0, 200).

Calculemos el máximo de la función F(x,y) = 50000x + 30000y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0), B(500,0), C(300,200) y D(0, 200). En el caso de que coincidan en dos vértices consecutivos la solución es todo el segmento que los une.

F(0,0) = 50000(0) + 30000(0) = 0;   **F(500,0)** = 50000(500) + 30000(0) **= 25000000**
F(300,200) = 50000(300) + 30000(200) = 21000000; F(0,200) = 50000(0) + 30000(200) = 6000000.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 25000000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en el vértice B(500,0), es decir el máximo ingreso es de 25000000 pts. y se alcanza cosechando 500 Tm de garbanzos y 0 Tm de lentejas.**

EJERCICIO 2_B

a) (1'5 puntos) La grafica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (-1,0) y tiene un máximo relativo en el punto (0,4). Halle los coeficientes a, b y c.
b) (1'5 puntos) Obtenga los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$.

Solución

a)
La grafica de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (-1,0) y tiene un máximo relativo en el punto (0,4). Halle los coeficientes a, b y c.

Como pasa por el punto (-1,0), tenemos que **f(-1) = 0.**
Como tiene un máximo relativo (anula la 1ª derivada) en el punto (0,4), tenemos que **f(0) = 4** (por punto) y **f'(0)= 0** (por extremo).

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$; $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

De f(-1) = 0 → $(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + c = 0$ → $-1 + a - b + c = 3$ → **a - b + c = 1.**
De f(0) = 4 → $(0)^3 + a(0)^2 + b(0) + c = 4$ → $0 + c = 4$ → **c = 4.**
De f'(0) = 0 → $3(0)^2 + 2a(0) + b = 0$ → b = 0, de donde **b = 0.** Entrando en la primera tenemos:
a - 0 + 4 = 1, **de donde los valores pedidos son a = -3, b = 0 y c = 4**.
b)
Obtenga los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$.

Estudiamos la monotonía (Estudio de la primera derivada g'(x)) y la curvatura (estudio de la segunda derivad g''(x)).

Monotonía. Estudio de la primera derivada g'(x).

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$; $g'(x) = 3x^2 - 12x$.

De g'(x) = 0, tenemos $3x^2 - 12x = 0 = x(3x – 12)$, de donde x = 0 y x = 4, que serán los posibles extremos.
Como $g'(-1) = 3(-1)^2 – 12(-1) = 9 > 0$, g(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,0)$.

Como $g'(2) = 3(2)^2 – 12(2) = -12 < 0$, g(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (0,4).

Como $g'(5) = 3(5)^2 – 12(5) = 15 > 0$, g(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(4,+\infty)$.

Por definición en x = 0 hay un máximo relativo que vale $g(0) = (0)^3 – 6(0)^2 + 20 = 20$.
Por definición en x = 4 hay un mínimo relativo que vale $g(4) = (4)^3 – 6(4)^2 + 20 = -12$.

Curvatura. Estudio de la segunda derivad g''(x).

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$; $g'(x) = 3x^2 - 12x$; $g''(x) = 6x - 12$.

De g''(x) = 0, tenemos 6x - 12 = 0, de donde x = 2, que será el posible punto de inflexión.
De g''(0) = 6(0) – 12 = -12 < 0, tenemos que g(x) es cóncava $(\cap)$ en $(-\infty,2)$.
De g''(3) = 6(3) – 12 = 6 > 0, tenemos que g(x) es convexa $(\cup)$ en $(2,+\infty)$.
Por definición en x = 2 hay un punto de inflexión, que vale $g(2) = (2)^3 – 6(2)^2 + 20 = 4$

EJERCICIO 3_B

Parte 1

Tenemos tres cajas de bombones, A, B y C. La caja A contiene 10 bombones, de los cuales 4 están rellenos; la caja B contiene 8 bombones, de los cuales 3 están rellenos y la caja C contiene 6 bombones, de los que 1 esta relleno.
a) (0'5 puntos) Si tomamos al azar un bombón de la caja A, ¿Cuál es la probabilidad de que no esté relleno?
b) (1'5 puntos) Si elegimos al azar una de las tres cajas y tomamos un bombón de la caja elegida, ¿cual es la probabilidad de que este relleno?

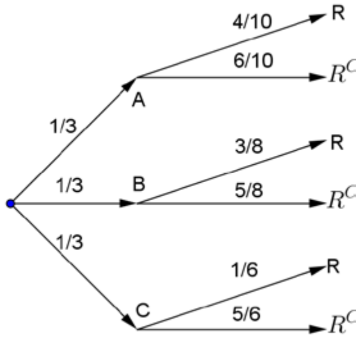
Solución

Tenemos tres cajas de bombones, A, B y C. La caja A contiene 10 bombones, de los cuales 4 están rellenos; la caja B contiene 8 bombones, de los cuales 3 están rellenos y la caja C contiene 6 bombones, de los que 1 esta relleno.
a)
Si tomamos al azar un bombón de la caja A, ¿Cuál es la probabilidad de que no esté relleno?

Llamemos A, B, C, R y R^C, a los sucesos siguientes, "caja A", "caja B", "caja C", "bombones rellenos" y "bombones no rellenos", respectivamente.

Datos del problema p(A) = p(B) = p(C) = 1/3, p(R/A) = 4/10, p(R/B) = 3/8, p(R/C) = 1/6,….

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).



Aplicando el Teorema de la probabilidad Total

p(tomamos al azar un bombón de la caja A, ¿Cuál es la probabilidad de que no esté relleno?) =
= $p(R^C/A)$ = 6/10 = 3/5.

b)
Si elegimos al azar una de las tres cajas y tomamos un bombón de la caja elegida, ¿cuál es la probabilidad de que este relleno?

Aplicando el Teorema de la probabilidad Total
p(bombón relleno) = **p(R) =** p(A)·p(C/A) + p(B)·p(V/B) + p(V)·p(Al/C) =
= (1/3)·(4/10) + (1/3)·(3/8) + (1/3)·(1/6) **= 113/360 ≅ 0'313889.**

EJERCICIO 3_B

Parte 2

Sea un conjunto de cuatro bolas, marcadas con los números 1, 3, 5 y 7.

a) (1 punto) Escriba todas las muestras de tamaño 2 que podrían formarse con esas bolas si el muestreo se hace sin reposición; calcule las medias de los números de cada muestra y halle la media de todas esas medias.

b) (1 punto) Haga lo mismo que en a) pero suponiendo que el muestreo se hace con reemplazamiento.

Solución

Sea un conjunto de cuatro bolas, marcadas con los números 1, 3, 5 y 7.

a)

Escriba todas las muestras de tamaño 2 que podrían formarse con esas bolas si el muestreo se hace sin reposición; calcule las medias de los números de cada muestra y halle la media de todas esas medias.

Construyamos la distribución muestral de medias sin remplazaciento y, para ello, calculamos la media de todas las muestras posibles sin reemplazamiento de tamaño 2 que son 12. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

	MUESTRAS											
Elementos	1 3	1 5	1 7	3 1	3 5	3 7	5 1	5 3	5 7	7 1	7 3	7 5
Media de la muestra $\overline{x}_i$	2	3	4	2	4	5	3	4	6	4	5	6

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
2	2	4	8
3	2	6	18
4	4	16	64
5	2	10	50
6	2	12	72
$\sum$	**N=12**	**48**	**212**

La media de la distribución muestral de medias (media de las medias muestrales) es:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{48}{12} = 4$$

La varianza de la distribución muestral de medias es **(No lo piden)**::

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum n_i\cdot(x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{212}{12} - (4)^2 = \frac{5}{3} \cong \mathbf{1'6667.}$$

b)

Haga lo mismo que en a) pero suponiendo que el muestreo se hace con reemplazamiento.

Construyamos la distribución muestral de medias y, para ello, calculamos la media de todas las muestras posibles con reemplazamiento de tamaño 2 que son 16. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

	MUESTRAS															
Elementos	1 1	1 3	1 5	1 7	3 1	3 3	3 5	3 7	5 1	5 3	5 5	5 7	7 1	7 3	7 5	7 7
Media de la muestra $\overline{x}_i$	1	2	3	4	2	3	4	5	3	4	5	6	4	5	6	7

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

x_i	n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i\cdot(x_i)^2$
1	1	1	1
2	2	4	8
3	3	9	27

4	4	16	64
5	3	15	75
6	2	12	72
7	1	7	49
$\sum$	**N=16**	**64**	**296**

La media de la distribución muestral de medias (media de las medias muestrales) es:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{64}{16} = 4$$

La varianza de la distribución muestral de medias es **(No lo piden)**::

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum n_i \cdot (x_i)^2}{N} - \overline{x}^2 = \frac{296}{16} - (4)^2 = \frac{5}{2} = 2'5.$$