PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2015

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

a) Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{3\ln(x)}{x^3} \qquad g(x)=(1-x^2)\cdot(x^3-1)^2 \qquad h(x)=3x^2-7x+\frac{1}{e^{2x}}$$

b) Halle las asíntotas de la función $p(x)=\dfrac{7x}{3x-12}$

SOCIALES II. 2015 JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x)=\dfrac{3\cdot\frac{1}{x}\cdot x^3-3x^2\cdot 3\ln x}{(x^3)^2}=\dfrac{3x^2\cdot(1-3\ln x)}{x^6}=\dfrac{3\cdot(1-3\ln x)}{x^4}$

$$g'(x)=-2x\cdot(x^3-1)^2+2\cdot(x^3-1)\cdot 3x^2\cdot(1-x^2)=(x^3-1)\cdot\left(-2x^4+2x+6x^2-6x^4\right)=(x^3-1)\cdot\left(-8x^4+6x^2+2x\right)$$

$$h'(x)=6x-7-\frac{2\cdot e^{2x}}{(e^{2x})^2}=6x-7-\frac{2}{e^{2x}}$$

b) $p(x)=\dfrac{7x}{3x-12}$

La recta $x=4$ es una asíntota vertical, ya que: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{7x}{3x-12}=\dfrac{28}{0}=\infty$

La recta $y=\dfrac{7}{3}$ es una asíntota horizontal, ya que: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x}{3x-12}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{3}=\dfrac{7}{3}$

No tiene asíntota oblicua, ya que tiene asíntota horizontal.

Se considera la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & si \quad 0\le x\le 2 \\ \dfrac{8x+a}{x-1} & si \quad x>2 \end{cases}$ **.**

a) Determine el valor de *a*, para que la función sea continua.
b) ¿Para $a=-10$, es creciente la función en $x=3$?.
c) Halle sus asíntotas para $a=-10$
SOCIALES II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función racional $\dfrac{8x+a}{x-1}$ es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$. La función polinómica x^2+2 es continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad en $x=2$.

Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+2)=6 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{8x+a}{x-1}=16+a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Rightarrow 6=16+a\Rightarrow a=-10$$

b) Calculamos la derivada

$$f'(x)=\frac{8(x-1)-1(8x-10)}{(x-1)^2}=\frac{2}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}>0\Rightarrow \text{ Es creciente}$$

b) La función polinómica x^2+2 no tiene asíntotas.

Calculamos las asíntotas de la función racional $\dfrac{8x-10}{x-1}$

Asíntota vertical: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{8x-10}{x-1}=\infty\Rightarrow x=1$ es una asíntota vertical, pero no está en su dominio

Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x-10}{x-1}=\dfrac{\infty}{\infty}=8\Rightarrow y=8$ es la asíntota horizontal.

Una entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, *R*(*x*), en miles de euros, viene dada por la función

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5 \qquad 1 \le x \le 500$$

donde *x* es la cantidad de dinero invertida en miles de euros.
a) Determine qué cantidad de dinero se debe invertir para obtener la máxima rentabilidad.
b) ¿Qué rentabilidad se obtendría con dicha inversión?
c) ¿Cuál es la cantidad de dinero para la que se obtiene menor rentabilidad?
SOCIALES II. 2015 RESERVA 1 EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) El máximo absoluto estará en los extremos del intervalo o bien en las soluciones de la ecuación $R'(x) = 0$.

$$R(1) = -0'001 \cdot 1^2 + 0'5 \cdot 1 + 2'5 = 2'999$$

$$R(500) = -0'001 \cdot 500^2 + 0'5 \cdot 500 + 2'5 = 2'5$$

$$R'(x) = -0'002x + 0,5 = 0 \Rightarrow x = 250 \Rightarrow R(250) = -0'001 \cdot 250^2 + 0'5 \cdot 250 + 2'5 = 65$$

Luego, vemos que el máximo absoluto corresponde para $x = 250$. Por lo tanto la cantidad que se debe invertir son 250.000 €.

b) La rentabilidad para ese valor de *x* es 65.000 €

c) La menor rentabilidad se obtiene para $x = 500$ y es de 2.500 €

Sea la función $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(ax-12) & si \quad x<-1\\ -x^2+b(x-1) & si \quad x\geq -1\end{cases}$

a) Halle los valores de *a* y *b* sabiendo que la función es derivable en $x=-1$

b) Para $a=1$ **y** $b=-1$ **y obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función** $f(x)$ **en el punto de abscisa** $x=-2$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 1 EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $\frac{1}{2}(ax-12)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función polinómica $-x^2+b(x-1)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=-1$.

Estudiamos la continuidad en $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{1}{2}(ax-12)=\frac{-a-12}{2}\\ \lim\limits_{x\to -1^+}-x^2+b(x-1)=-1-2b\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)\Rightarrow \frac{-a-12}{2}=-1-2b\Rightarrow -a+4b=10$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=-1$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}a & si \quad x<-1\\ -2x+b & si \quad x\geq -1\end{cases}$ y como es derivable, entonces:

$$\left.\begin{array}{l}f'(-1^-)=\frac{1}{2}a\\ f'(-1^+)=2+b\end{array}\right\}\Rightarrow f'(-1^-)=f'(-1^+)\Rightarrow \frac{1}{2}a=2+b\Rightarrow a-2b=4$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=18$; $b=7$

b) La recta tangente en $x=-2$, es: $y-f(-2)=f'(-2)\cdot(x+2)$.

- $f(-2)=-7$
- $f'(x)=\frac{1}{2}a\Rightarrow f'(-2)=\frac{1}{2}$

Sustituyendo, tenemos: $y+7=\frac{1}{2}\cdot(x+2)\Rightarrow x-2y-12=0$

La mosca común solamente vive si la temperatura media de su entorno está comprendida entre 4ºC y 36ºC. La vida en días, en función de la temperatura media *T*, medida en grados centígrados, viene dada por la función:

$$V(T) = -\frac{1}{16}(T^2 - 40T + 16) \qquad T \in [4, 36]$$

a) Determine la vida máxima que puede alcanzar la mosca común.
b) Calcule la vida mínima e indique la temperatura media a la que se alcanza.
c) Si sabemos que una mosca ha vivido 15 días, ¿a qué temperatura media ha estado el entorno donde ha habitado?
SOCIALES II. 2015 RESERVA 2 EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) El máximo absoluto estará en los extremos del intervalo o bien en las soluciones de la ecuación $V'(T) = 0$.

$$V(4) = -\frac{1}{16}(16 - 160 + 16) = 8$$

$$V(36) = -\frac{1}{16}(1296 - 1440 + 16) = 8$$

$$V' = -\frac{1}{16}(2T - 40) = 0 \Rightarrow T = 20 \Rightarrow V(20) = -\frac{1}{16}(400 - 800 + 16) = 24$$

Luego, vemos que el máximo absoluto corresponde para $T = 20$. Por lo tanto, la vida máxima es de 24 días y se alcanza a la temperatura de 20ºC.

b) La vida mínima es de 8 días y se alcanza a la temperatura de 4ºC ó a 36ºC.

c)

$$15 = -\frac{1}{16}(T^2 - 40T + 16) \Rightarrow T^2 - 40T + 256 = 0 \Rightarrow T = \frac{40 \pm \sqrt{1600 - 1024}}{2} = \frac{40 \pm 24}{2} \Rightarrow T = 32\ ;\ T = 8$$

Por lo tanto, la temperatura ha sido 8ºC ó 32ºC

Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2\cdot(1-3x)^2}{1+3x}$

b) $g(x)=(x^2-x+1)\cdot e^{5x}$

c) $h(x)=\log(x^2+x+1)$

SOCIALES II. 2015 RESERVA 2 EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) $f'(x)=\dfrac{2\cdot 2\cdot(1-3x)\cdot(-3)\cdot(1+3x)-3\cdot 2\cdot(1-3x)^2}{(1+3x)^2}=\dfrac{54x^2+36x-18}{(1+3x)^2}$

b) $g'(x)=(2x-1)\cdot e^{5x}+5\cdot e^{5x}\cdot(x^2-x+1)=e^{5x}\cdot(5x^2-3x+4)$

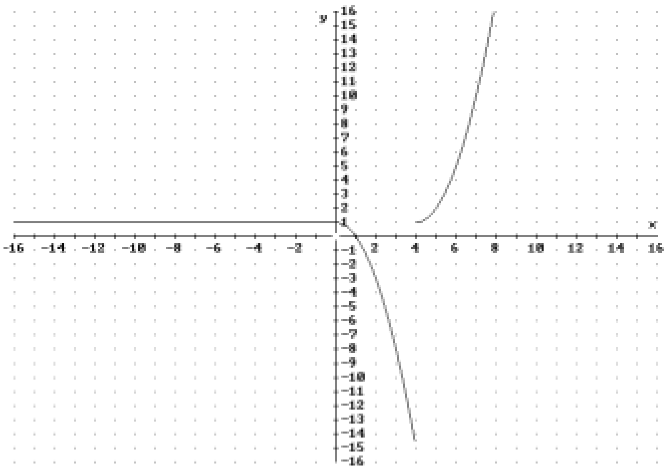
c) $h'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}\log e$

Sea la función $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x\le 0 \\ -x^2+1 & si \quad 0<x<4 \\ x^2-8x+17 & si \quad x\ge 4 \end{cases}$

a) Represente gráficamente la función *f*.
b) Estudie su continuidad y derivabilidad.
c) Calcule $f'(1)$ y $f'(5)$
SOCIALES II. 2015 RESERVA 3 EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)



b) Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua en $x=0$ y $x=4$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (-x^2+1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=1 \Rightarrow \text{Continua en } x=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} (-x^2+1)=-15 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} (x^2-8x+17)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)\ne \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow \text{ No es continua en } x=4$$

Luego, la función es continua en $\mathbb{R}-\{4\}$

Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es derivable en $x=0$ y $x=4$.

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<0 \\ -2x & si \quad 0<x<4 \\ 2x-8 & si \quad x>4 \end{cases}$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow \text{ Derivable en } x=0$$

La función no es derivable en $x=4$ ya que no es continua, luego la función es derivable en $\mathbb{R}-\{4\}$

c) $f'(1)=-2$; $f'(5)=2$.

Se considera la función $f(x)=x^3-2x^2+x$
a) Halle el máximo, el mínimo y el punto de inflexión de la función.
b) Calcule los puntos de corte con los ejes.
c) Obtenga las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisas $x=0$ y $x=1$
SOCIALES II. 2015 RESERVA 3 EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=\frac{1}{3}$

	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},1\right)$	$(1,\infty)$
Signo f'	+	—	+
Función	C	D	C

Máximo $\left(\frac{1}{3},\frac{4}{27}\right)$ mínimo $(1,0)$

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=6x-4=0 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$

	$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3},\infty\right)$
Signo f''	—	+
Función	Cn	Cx

P.I. $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{27}\right)$

b) Puntos de corte eje X $(0,0)$ y $(1,0)$ ya que $y=0 \Rightarrow x^3-2x^2+x=0 \Rightarrow x=0\ ;\ x=1$
Puntos de corte eje Y $(0,0)$ ya que $x=0 \Rightarrow y=0$

c) La recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$
como $f(0)=0$ y $f'(x)=3x^2-4x+1 \Rightarrow f'(0)=1$ Sustituyendo en la ecuación, tenemos,

$$y-0=1\cdot(x-0) \Rightarrow y=x$$

La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$
como $f(1)=0$ y $f'(x)=3x^2-4x+1 \Rightarrow f'(1)=0$ Sustituyendo en la ecuación, tenemos,

$$y-0=0\cdot(x-1) \Rightarrow y=0$$

Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x+4} & si \quad x<2 \\ x^3-3x^2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$

a) Determine y represente gráficamente sus asíntotas. Calcule el punto donde la gráfica de la función *f* corta al eje de ordenadas.
b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en $x=-3$
SOCIALES II. 2015 RESERVA 4 EJERCICIO 2. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) La función x^3-3x^2 al ser polinómica no tiene asíntotas. Estudiamos las asíntotas de la función $\dfrac{2x-5}{x+4}$

Verticales: La recta $x=a$ es una asíntota vertical si

$$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -4^-} f(x)=\dfrac{-13}{0^+}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to -4^+} f(x)=\dfrac{-13}{0^-}=+\infty \end{cases} \Rightarrow x=-4 \text{ es una asíntota vertical}$$

Horizontales: La recta $y=b$ es una asíntota horizontal si

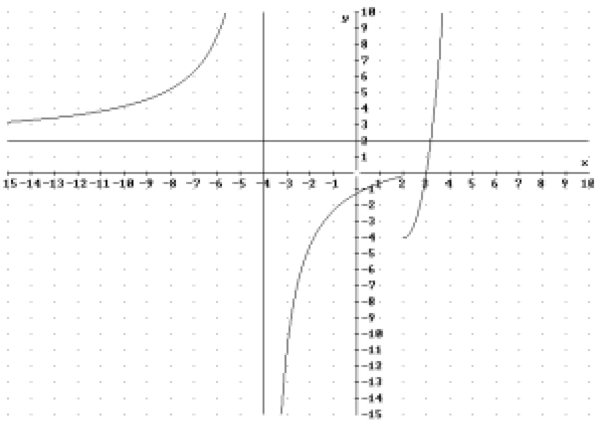
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{2x-5}{x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1}\Rightarrow y=2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Oblicuas: No tiene.

Calculamos el punto de corte con el eje de ordenadas

$$x=0\Rightarrow y=\frac{2\cdot 0-5}{0+4}=-\frac{5}{4}=-1'25\Rightarrow(0,-1'25)$$

Hacemos el dibujo de la función y las asíntotas



b) La recta tangente en $x=-3$ es $y-f(-3)=f'(-3)\cdot(x+3)$

$$f(-3)=\frac{-11}{1}=-11 \qquad ; \qquad f'(x)=\frac{2(x+4)-1(2x-5)}{(x+4)^2}\Rightarrow f'(-3)=\frac{2+11}{1}=13$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+11=13\cdot(x+3)\Rightarrow y=13x+28$

Se considera la función f, definida a trozos por la expresión

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x+6 & si \quad x\le 2 \\ x+2 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de la función.
b) Analice la derivabilidad de la función.
c) Represéntela gráficamente, determinando los extremos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de corte con los ejes.
SOCIALES II. 2015 RESERVA 4 EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a y b) La función polinómica $-x^2+x+6$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función polinómica $x+2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=2$.

Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} -x^2+x+6=4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x+2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} = \lim_{x\to 2^+} = f(2)=4 \Rightarrow \text{ Es continua en } x=2$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=2$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -2x+1 & si \quad x<2 \\ 1 & si \quad x>2 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-3 \\ f'(2^+)=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+) \Rightarrow \text{ No es derivable en } x=2$$

Por lo tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{2\}$.

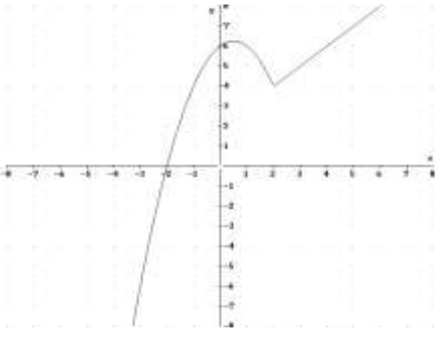
c) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $-2x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

	$(-\infty,\frac{1}{2})$	$\left(\frac{1}{2},2\right)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

Tiene un máximo relativo en $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{25}{4}\right)$. En $(2,4)$ tiene un mínimo relativo (pico), no derivable.

Puntos de corte eje X $(-2,0)$ ya que $y=0 \Rightarrow -x^2+x+6=0 \Rightarrow x=-2$; $x=3(No)$

Puntos de corte eje Y $(0,6)$ ya que $x=0 \Rightarrow y=6$



a) Determine el valor de *a* para que sea continua en $x=-1$ la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{x-1} & si \;\; x\leq -1 \\ x^3-3x^2+6x-2 & si \;\; x>-1 \end{cases}$$

b) Calcule los coeficientes *b* y *c* de la función $g(x)=x^3+bx^2+cx-2$ para que $(1,2)$ sea un punto de inflexión de g

SOCIALES II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Estudiamos la continuidad en $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{ax}{x-1}=\dfrac{-a}{-2}=\dfrac{a}{2} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} x^3-3x^2+6x-2=-12 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{2}=-12 \Rightarrow a=-24$$

b) Calculamos la primera y segunda derivada de *g*

$$g'(x)=3x^2+2bx+c$$
$$g''(x)=6x+2b$$

- Por ser punto de inflexión $\Rightarrow g''(1)=0 \Rightarrow 6\cdot 1+2b=0 \Rightarrow b=-3$

- La función pasa por $(1,2) \Rightarrow g(1)=2 \Rightarrow 1-3+c-2=2 \Rightarrow c=6$

Luego, los valores son: $b=-3$; $c=6$

Sea la función $f(x)=x^3-9x^2+8$
a) Halle las coordenadas de sus extremos relativos y de su punto de inflexión, si existen.
b) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
SOCIALES II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=3x^2-18x=0 \Rightarrow x=0; x=6$

	$(-\infty,0)$	$(0,6)$	$(6,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	+
Función	C	D	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$ y decreciente en el intervalo $(0,6)$. Tiene un máximo relativo en $(0,8)$ y un mínimo relativo en $(6,-100)$.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x)=6x-18=0 \Rightarrow x=3$

	$(-\infty,3)$	$(3,+\infty)$
Signo $f''(x)$	−	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty,3)$ y convexa en el intervalo $(3,+\infty)$. Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en $(3,-46)$.

b) Calculamos la recta tangente en $x=1$

$f(1)=(1)^3-9\cdot(1)^2+8=0$

$f'(x)=3x^2-18x \Rightarrow f'(1)=3\cdot(1)^2-18\cdot 1=-15$

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1) \Rightarrow y-0=-15(x-1) \Rightarrow y=-15x+15$$