PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2016

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 1, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 1, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 1, Opción A

Las filas de la matriz P indican los respectivos precios de tres artículos A_1, A_2 y A_3 en dos comercios, C_1 (fila 1) y C_2 (fila 2): $P=\begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}$

Cati desea comprar 2 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 3 de A_3

Manuel desea comprar 5 unidades del artículo A_1, 1 de A_2 y 1 de A_3

Han dispuesto esas compras en la matriz Q: $Q=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule $P\cdot Q^t$ y $Q\cdot P^t$ e indique el significado de los elementos de las matrices resultantes.

b) A la vista de lo obtenido en el apartado anterior, ¿dónde les interesa hacer la compra a cada uno?

SOCIALES II. 2016 JUNIO. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

Nota aclaratoria: En el enunciado del problema hay una pequeña errata. Dice: “Las filas de la matriz P…” cuando en realidad debe decir: “Las columnas de la matriz P…”

a) Calculamos

$$P\cdot Q^t=\begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 \\ 23 & 25 & 17 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 115 & 160 \\ 122 & 157 \end{pmatrix}$$

El elemento $a_{11}=115$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_1 por los artículos que desea comprar Cati.

El elemento $a_{12}=160$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_1 por los artículos que desea comprar Manuel.

El elemento $a_{21}=122$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_2 por los artículos que desea comprar Cati.

El elemento $a_{22}=157$ representa el precio de los artículos en el supermercado C_2 por los artículos que desea comprar Manuel.

Calculamos

$$Q\cdot P^t=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 20 & 25 \\ 15 & 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 115 & 122 \\ 160 & 157 \end{pmatrix}$$

El elemento $b_{11}=115$ representa los artículos de Cati por el precio en el supermercado C_1.

El elemento $b_{12}=122$ representa los artículos de Cati por el precio en el supermercado C_2.

El elemento $b_{21}=160$ representa los artículos de Manuel por el precio en el supermercado C_1.

El elemento $b_{22}=157$ representa los artículos de Manuel por el precio en el supermercado C_2.

b) Según lo calculado en el apartado anterior, vemos que a Cati le interesa comprar en el supermercado C_1 y a Manuel en el supermercado C_2

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$**.**

a) Calcule A^2 **y** A^{2016}**.**

b) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X-B=C^t$**.**

SOCIALES II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos A^2 y A^{2016}

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

$$A^3=A^2\cdot A=I\cdot A=A$$

$$A^4=A^3\cdot A=A\cdot A=I$$

Por lo tanto: $A^{2016}=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$A\cdot X-B=C^t\Rightarrow A\cdot X=C^t+B\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ **y** $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$**.**

a) Resuelva la ecuación matricial $C\cdot B\cdot X-2A\cdot X=A^t$**.**

b) Analice cuáles de las siguientes operaciones, sin efectuarlas, se pueden realizar y justifique las respuestas: $B\cdot C+2A$ **,** $A\cdot C+C$ **,** $B^t\cdot C$ **,** $C\cdot B-A$**.**

SOCIALES II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & -9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-a+3c & -b+3d\\ 3a-3c & 3b-3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-a+3c=1\\ 3a-3c=2\\ -b+3d=0\\ 3b-3d=-3\end{array}\right\}\Rightarrow a=\frac{3}{2}\ ;\ b=-\frac{3}{2}\ ;\ c=\frac{5}{6}\ ;\ d=-\frac{1}{2}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

b)

$B_{(3,2)}\cdot C_{(2,3)}+2A_{(2,2)}\Rightarrow$ No se puede, ya que $B\cdot C$ es una matriz (3,3) y no se puede sumar con una matriz (2,2).

$A_{(2,2)}\cdot C_{(2,3)}+C_{(2,3)}\Rightarrow(2,3)$ Si se puede, ya que $A\cdot C$ es una matriz (2,3) y se puede sumar con otra matriz (2,3).

$B^t{}_{(2,3)}\cdot C_{(2,3)}\Rightarrow$. No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$C_{(2,3)}\cdot B_{(3,2)}-A_{(2,2)}\Rightarrow(2,2)$ Si se puede, ya que $C\cdot B$ es una matriz (2,2) y se puede restar con otra matriz (2,2).

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot\left(B\cdot B^t\right)=\dfrac{1}{2}A-2A^t$ **.**

b) Razone cuáles de las siguientes operaciones pueden realizarse e indique, en su caso, la dimensión de la matriz resultante: $A\cdot B$ **,** $A\cdot B^t$ **,** $B\cdot A^{-1}$ **,** $B^t\cdot A+A^{-1}$

SOCIALES II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+b & a+5b \\ 2c+d & c+5d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} 2a+b=-3 \\ a+5b=6 \\ 2c+d=-9 \\ c+5d=9 \end{array}\right\}\Rightarrow a=-\frac{7}{3}\ ;\ b=\frac{5}{3}\ ;\ c=-6\ ;\ d=3$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

b)

$A_{(2,2)}\cdot B_{(2,3)}\Rightarrow(2,3)$ Si se puede y la matriz resultante es de orden (2,3).

$A_{(2,2)}\cdot B^t_{(3,2)}\Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz es distinto del número de filas de la segunda matriz.

$B_{(2,3)}\cdot A^{-1}_{(2,2)}\Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz es distinto del número de filas de la segunda matriz.

$B^t_{(3,2)}\cdot A_{(2,2)}+A^{-1}_{(2,2)}\Rightarrow$ No se puede, ya que $B^t\cdot A$ es una matriz (3,2) y no se puede sumar con una matriz (2,2).

a) Si A es una matriz de dimensión m x n, indique la dimensión de una matriz X si se verifica que $\left(A^t \cdot A\right) \cdot X = I_n$.

b) Calcule dicha matriz X en el caso en que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Calcule, si es posible, el producto $A \cdot \left(A^t \cdot A\right)$.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^t{}_{(n,m)} \cdot A_{(m,n)} = B_{(n,n)}$$
$$B_{(n,n)} \cdot X_{(n,a)} = I_{(n,n)} \Rightarrow X_{(n,n)}$$

Luego, la matriz X es una matriz cuadrada de orden n

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3a+c &= 1 \\ a+3c &= 0 \\ 3b+d &= 0 \\ b+3d &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{3}{8} \; ; \; b = -\frac{1}{8} \; ; \; c = -\frac{1}{8} \; ; \; d = \frac{3}{8}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Justifique cuáles de las siguientes operaciones se pueden realizar y en dichos casos calcule el resultado: $A\cdot B$, $B\cdot A$, $B\cdot C$ y $C^t\cdot B^t$.

b) Calcule la matriz X en la ecuación $A\cdot X+B^t=4C$.

SOCIALES II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a)

$A_{(2,2)}\cdot B_{(1,2)} \Rightarrow$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz es distinto del número de filas de la segunda matriz.

$$B_{(1,2)}\cdot A_{(2,2)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$B_{(1,2)}\cdot C_{(2,1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$$

$$C^t{}_{(1,2)}\cdot B^t{}_{(2,1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}.$$

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 3a \\ a+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 3a \\ a+2b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -7 \end{pmatrix}\Rightarrow a=-\frac{2}{3}\ ;\ b=-\frac{19}{6}$$

Luego, la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{19}{6} \end{pmatrix}$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

a) Resuelva la ecuación matricial $A^2 \cdot X + C = 2B$

b) ¿Qué dimensiones deben tener las matrices P **y** Q **para que las matrices** $(B+C)\cdot P$ **y** $B\cdot Q\cdot C^t$ **sean cuadradas?.**

SOCIALES II. 2016 SEPTIEMBRE EJERCICIO 1. OPCION A

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} -a-4d & -b-4e & -c-4f \\ 2a+7d & 2b+7e & 2c+7f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 6 & -3 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow a=59 \; ; \; b=-33 \; ; \; c=58 \; ; \; d=-16 \; ; \; e=9 \; ; \; f=-16$$

Luego la matriz que nos piden es: $X=\begin{pmatrix} 59 & -33 & 58 \\ -16 & 9 & -16 \end{pmatrix}$

b) La matriz P tiene de dimensión $(3,2)$, para que la matriz resultante sea cuadrada de dimensión 2
La matriz Q tiene de dimensión $(3,3)$, para que la matriz resultante sea cuadrada de dimensión 2