SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2012 (MODELO 1)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 3 & -1 & b \end{pmatrix}$.

a) (1 punto) Halle los valores de *a* y *b* para que se verifique $B\cdot C^t = A$
b) (1'5 puntos) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X - A^2 = I_2$.

Solución

(a)
Halle los valores de *a* y *b* para que se verifique $B\cdot C^t = A$

$$B\cdot C^t = A \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -a+2 & 2b-4 \\ a-1 & -b+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Igualando miembro a miembro
$-a+2 = -1 \quad \rightarrow a = 3$
$2b-4 = -6 \quad \rightarrow b = -1$
$a-1 = 2 \quad \rightarrow a = 3$
$-b+3 = 4 \quad \rightarrow b = -1$
Luego a = 3 y b = -1.
(b)
Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X - A^2 = I_2$.

$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

S la matriz A tiene matriz inversa A^{-1}, (podemos pasar de $(A|I_2)$ mediante transformaciones elementales a $(I_2|B)$, la matriz B es A^{-1}), podemos multiplicar la expresión matricial $A\cdot X - A^2 = I_2$ por la izquierda por la matriz A^{-1}.

$$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)_{F_2+2F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & 1 \end{array}\right)_{\substack{-1\cdot F_1 \\ F_2/(-8)}} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/8 & -1/8 \end{array}\right)^{F_1-6\cdot F_1} \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/8 & 6/8 \\ 0 & 1 & -2/8 & -1/8 \end{array}\right) =$$

$(I_2|A^{-1})$, por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/8 & 6/8 \\ -2/8 & -1/8 \end{pmatrix}$.

De $A\cdot X - A^2 = I_2$, tenemos $A^{-1}\cdot A\cdot X - A^{-1}\cdot A^2 = A^{-1}\cdot I_2 \rightarrow I_2\cdot X - I_2\cdot A = A^{-1} \rightarrow X - A = A^{-1} \rightarrow X = A + A^{-1}$

Luego $\mathbf{X} = A + A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/8 & 6/8 \\ -2/8 & -1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4/8 & -6+6/8 \\ 2-2/8 & 4-1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/8 & -42/8 \\ 14/8 & 31/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -21/4 \\ 7/4 & 31/8 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2_A

De la función *f* se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$.
a) (1'5 puntos) Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.
b) (1 punto) Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto (1,1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Solución

(a)
Estudie la monotonía y la curvatura de *f*.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x).

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$
Si $f'(x) = 0$; tenemos $3x^2 - 8x + 5 = 0$, de donde **x = 1** y **x = 5/3** ≅ 1'67, que puede ser los extremos relativos.

Como $f'(0) = 5 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty,1)$.
Como $f'(1'1) = 3(1'1)^2 - 8(1'1) + 5 = -0'17 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (1, 5/3).
Como $f'(2) = 3(2)^2 - 8(2) + 5 = 1 > 0$, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(5/3,+\infty)$.

Por definición x = 1 es un máximo relativo de f.
Por definición x = 5/3 es un mínimo relativo de f.

Me están pidiendo la curvatura, que es el estudio de f ''(x).

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$
$f''(x) = 6x - 8$
Si f ''(x) = 0; tenemos 6x – 8 = 0, de donde **x = 8/6** ≅ 1'33, que puede ser el punto de inflexión.

Como f ''(0) = - 8 < 0, f(x) es cóncava (∩) en (-∞,8/6).
Como f '(2) = 6(2) – 8 = 4 > 0, f(x) es convexa (∪) en (8/6,+ ∞).

Por definición x = 8/6 es un punto de inflexión de f.

(b)
Sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto (1,1), calcule la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

Nos han dado $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, con lo cual f'(1) = 0, y además de (1,1) tenemos f(1) = 1.

La recta tangente pedida es "y – f(1) = f'(1)·(x – 1)"
La recta tangente pedida es **y – 1 = 0(x – 1)**, es decir **y – 1 = 0** ó **y = 1**.

EJERCICIO 3_A

En un congreso de 200 jóvenes profesionales se pasa una encuesta para conocer los hábitos en cuanto a contratar los viajes por internet. Se observa que 120 son hombres y que, de estos, 84 contratan los viajes por internet, mientras que 24 de las mujeres no emplean esa vía.
Elegido un congresista al azar, calcule la probabilidad de que:
a) (1 punto) No contrate sus viajes por internet.
b) (0'75 puntos) Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.
c) (0'75 puntos) Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

Solución

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una tabla de contingencia (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Hombres = H	Mujeres = M	Totales
Contrato por internet = I	84		60
No Contrato por internet = I^C		24	
Totales	120		200

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Hombres = H	Mujeres = M	Totales
Contrato por internet = I	84	**56**	**140**
No Contrato por internet = I^C	**36**	24	**60**
Totales	120	**80**	200

(a)
No contrate sus viajes por internet.

$$\mathbf{p("I^C") =} \frac{\text{Número total de no contratos por Internet}}{\text{Número total de congresistas}} = \frac{60}{200} \mathbf{= 0'30.}$$

(b)
Use internet para contratar los viajes, si la persona elegida es una mujer.

$$\mathbf{p("contrato\ por\ Internet\ sabiendo\ que\ es\ Mujer") =} \frac{\text{Contrato por internet de mujeres}}{\text{Total de mujeres}} = \frac{56}{80} \mathbf{= 0'70.}$$

(c)
Sea hombre, sabiendo que contrata sus viajes por internet.

p("hombre, sabiendo que contrata por internet ") =

= $\dfrac{\text{Total de hombres que contratan por intertent}}{\text{Total contratos por internet}} = \dfrac{84}{140}$ **= 0'60.**

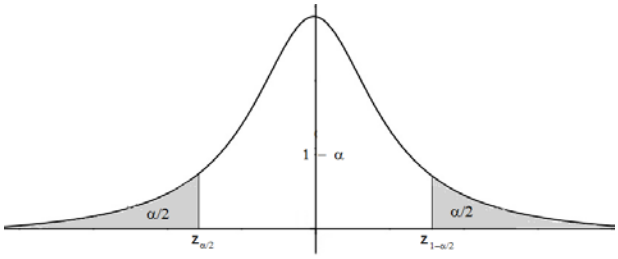
EJERCICIO 4_A

La variable "tiempo de reacción de un conductor ante un obstáculo imprevisto" sigue una distribución Normal con desviación típica 0'05 segundos. Al medir dicho tiempo en 50 conductores se ha obtenido un tiempo medio de 0'85 segundos.
a) (1'25 puntos) Halle el intervalo de confianza para el tiempo medio de reacción, con un nivel de confianza del 99%.
b) (1'25 puntos) ¿De qué tamaño mínimo ha de tomarse una muestra para que el error de estimación no supere 0'01 segundos, con un nivel de confianza del 95%?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de*

donde el tamaño mínimo de la muestra es n = $\left(\dfrac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

(a)
Halle el intervalo de confianza para el tiempo medio de reacción, con un nivel de confianza, $1 - \alpha$, del 99%.

Datos del problema: σ = 0'05; n = 50; $\overline{x}$ = 0'85; nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α=0'01, con la cual $\alpha/2$ = 0'005

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 - 0'005 = 0'995, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'995 vemos que no viene, sino que viene 0'9949 y 0'9941corresponde a z_1 = 2'57 y z_2 = 2'58. Realizando la media de dichos valores tenemos $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$\text{I.C. } (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(0'85 - 2'575\cdot\frac{0'05}{\sqrt{50}}, 0'85 + 2'575\cdot\frac{0'05}{\sqrt{50}}\right) \cong (0'8318, 0'8682)$$

(b)
¿De qué tamaño mínimo ha de tomarse una muestra para que el error de estimación no supere 0'01 segundos, con un nivel de confianza del 95%?

Datos del problema: σ = 0'05; $\overline{x}$ = 0'85; nivel de confianza = 95% = 0'95 = 1 - α, de donde α = 0'05, con la cual $\alpha/2 = \alpha/2$ = 0'05/2 = 0'025; Error = E < 0'01

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'025 = 0'975$ mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'975 vemos que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = 1'96$, por tanto tamaño mínimo pedido es:

$n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'96 \cdot 0'05}{0'01}\right)^2 \cong 96'04$, es decir **el tamaño mínimo es n = 97 personas**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$3x + 4y \ge 28; \quad 5x + 2y \le 42; \quad x - y \ge 0$$

a) (0'5 puntos) Razone si el punto de coordenadas (7,3) pertenece al recinto.
b) (1'5 puntos) Represente dicho recinto y halle sus vértices.
c) (0'5 puntos) Calcule el valor máximo de la función $F(x,y) = 3x - 2y + 6$ en el recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

Solución

(a)
Razone si el punto de coordenadas (7,3) pertenece al recinto.

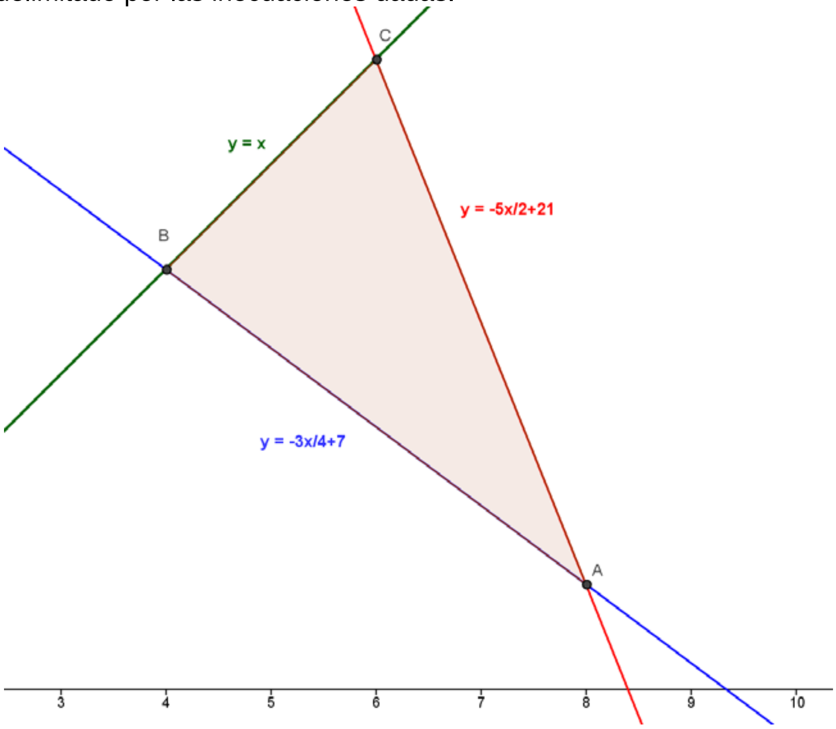
Sustituimos el punto (7,3) y vemos si verifica las tres inecuaciones a la vez.
$3x + 4y \ge 28$; $\rightarrow$ $3(7) + 4(3) \ge 28$ $\rightarrow$ $33 \ge 28$, cierto luego la verifica
$5x + 2y \le 42$; $\rightarrow$ $5(7) + 2(3) \le 42$ $\rightarrow$ $41 \le 42$, cierto luego la verifica
$x - y \ge 0$; $\rightarrow$ $(7) - (3) \ge 0$ $\rightarrow$ $4 \ge 0$, cierto luego la verifica
Luego el punto de coordenadas (7,3) pertenece al recinto.
(b)
Represente dicho recinto y halle sus vértices.

Las desigualdades $3x + 4y \ge 28$; $5x + 2y \le 42$; $x - y \ge 0$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $3x + 4y = 28$; $5x + 2y = 42$; $x - y = 0$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -3x/4 + 7; \quad y = -5x/2 + 21; \quad y = x;$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De $y = -3x/4 + 7$ e $y = -5x/2 + 21$; tenemos $-3x/4 + 7 = -5x/2 + 21$, de donde "$-3x+28 = -10x+84$", es decir sale $7x=56$, de donde "$x = 8$" e "$y = 1$", y **el punto de corte es A(8,1)**

De y = -3x/4 + 7 e y = x; tenemos -3x/4 + 7 = x, de donde "-3x+28 = 4x", es decir sale 28=7x, de donde "x = 4" e "y = 4", y **el punto de corte es B(4,4)**

De y = -5x/2 + 21 e y = x; tenemos -5x/2 + 21 = x, de donde "-5x+42 = 2x", es decir sale 42=7x, de donde "x = 6" e "y = 6", y **el punto de corte es C(6,6)**

Fijándonos en la resolución de las ecuaciones, **los vértices del recinto son: A(8,1); B(4,4) y el C(6,6).**
(c)
Calcule el valor máximo de la función F(x,y) = 3x – 2y + 6 en el recinto, indicando el punto o puntos donde se alcanza ese máximo.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(8,1); B(4,4) y el C(6,6).

F(8,1) = 3(8) – 2(1) + 6 = **28**, F(4,4) = 3(4) – 2(4) + 6 = **10**, F(6,6) = 3(6) – 2(6) + 6 = 12

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el mínimo absoluto de la función F en la región es 10 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en el vértice B(4,4), y el máximo absoluto es 28 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto A(8,1).

EJERCICIO 2_B

a) (1'25 puntos) Dada la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$, determine los valores de *a* y *b* sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1, 3) y alcanza un extremo en x = - 2.
b) (1'25 puntos) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x) = 3x^2 – 2x + 1$, en el punto de abscisa x = 1.

Solución

(a)
Dada la función $f(x) = 2x^2 + ax + b$, determine los valores de *a* y *b* sabiendo que su gráfica pasa por el punto (1,3) y alcanza un extremo en x = - 2.

Como f pasa por el punto (1,3) me está diciendo que f(1) = 3.
Como f alcanza un extremo en x = - 2, me está diciendo que f'(-2) = 0 (los extremos anulan la 1ª derivada).

$f(x) = 2x^2 + ax + b$
f'(x) = 4x + a
De f'(-2) = 0 $\rightarrow$ 4(-2) + a = -8 + a = 0, de donde **a = 8.**
De f(1) = 3 $\rightarrow$ $2(1)^2 + 8(1) + b = 3$, de donde **b = -7.**

b)
Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $g(x) = 3x^2 – 2x + 1$, en el punto de abscisa x = 1.

Nuestra función es $g(x) = 3x^2 – 2x + 1$
La recta tangente es " y – g(1) = g'(1)(x – 1) "

$g(x) = 3x^2 – 2x + 1$ $\rightarrow$ $g(1) = 3(1)^2 – 2(1) + 1 = 2$
g'(x) = 6x – 2 $\rightarrow$ g1(1) = 6(1) – 2(1) = 4

La recta tangente pedida es **y – 2 = 4(x – 1)**

EJERCICIO 3_B

Lanzamos un dado, si sale 5 o 6 extraemos una bola de una urna A, que contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si sale otro resultado se extrae una bola de la urna B, que contiene 3 bolas blancas y 7 negras. Calcule:
a) (1 punto) La probabilidad de que la bola extraída sea negra.
b) (0'5 puntos) La probabilidad de que la bola sea negra y de la urna B.
c) (1 punto) La probabilidad de que haya salido menos de 5 si la bola extraída ha sido blanca.

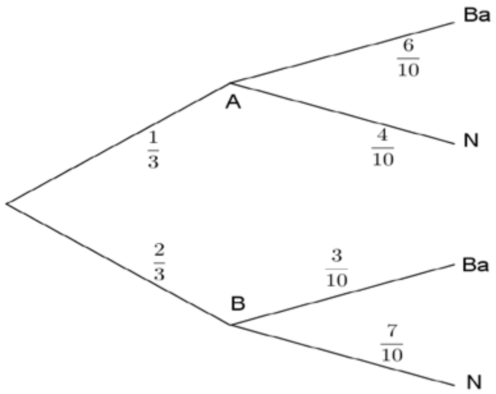
Solución

Lanzamos un dado, si sale 5 o 6 extraemos una bola de una urna A, que contiene 6 bolas blancas y 4 negras. Si sale otro resultado se extrae una bola de la urna B, que contiene 3 bolas blancas y 7 negras.

Para sacar una bola de A la probabilidad de hacerlo es 2/6 = 1/3
Para sacar una bola de B la probabilidad de hacerlo es 4/6 = 2/3

Llamemos A, B, Ba y N = $(B)^C$, a los sucesos siguientes, "sacar una bola de la bolsa A", " sacar una bola de la bolsa B", " sacar una bola blanca " y " sacar una negra ", respectivamente.

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



(a)
La probabilidad de que la bola extraída sea negra.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída sea negra (N) es:

p(N) = p(A).p(N/A) + p(B).p(N/B) = (1/3)·(4/10) + (2/3)·(7/10) = (3/5) = **0'6.**

(b)
La probabilidad de que la bola sea negra y de la urna B.

Me piden **p(B y N) = p(B∩N)** = p(B).p(N/B) = (2/3)·(7/10) = 7/15 ≅ **0'47**

(c)
(1 punto) La probabilidad de que haya salido menos de 5 si la bola extraída ha sido blanca

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/Ba) =} \frac{p(A \cap Ba)}{p(Ba)} = \frac{p(A).p(Ba/A)}{1 - p(N)} = \frac{(1/3)\cdot(6/10)}{1 - 3/5} = (1/2) = \mathbf{0'5}.$$

EJERCICIO 4_B

Un informe de un Ayuntamiento afirma que al menos el 26% de los usuarios del carril bici habrían utilizado el coche particular para sus desplazamientos de no haber existido dicho carril. Sin embargo, un periódico local anuncia la falsedad del dato, informando que una encuesta propia indica que solo 240 de los 1000 usuarios encuestados afirman que habrían utilizado el coche particular.

a) (1'5 puntos) Establezca un contraste, con hipótesis nula $H_0 : p_0 \geq 0'26$, para verificar la afirmación del Ayuntamiento e indique la región crítica de dicho contraste para un nivel de significación del 5%.

b) (1 punto) Con este nivel de significación ¿podría aceptarse el informe del Ayuntamiento?

Solución

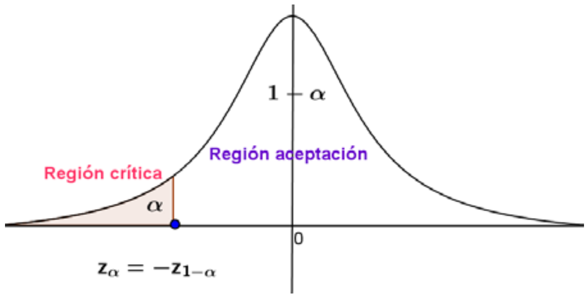
a)
Establezca un contraste, con hipótesis nula $H_0 : p_0 \geq 0'26$, para verificar la afirmación del Ayuntamiento e indique la región crítica de dicho contraste para un nivel de significación del 5%.

Datos del problema: p_0 = 26% = 0'26; n = 1000; $\hat{p}$ = 240/1000 = 0'24; región crítica = α = 5% = 0'05.

Etapa 1: Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \geq 0'26$ (al menos el 26% habrían usado el coche si no existiese el carril bici) y $H_1 : p_0 < 0'26$, la cual nos indica la dirección del contraste, es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: El nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos 1 - α = 0,95.

De $p(Z \le z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 – 0'05 = 0'95$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es la mitad de 0'9495 y 0'9505, que corresponde a $z_{1-\alpha} = (1'64+1'65)/2 = 1'645$, con lo cual el **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - 1'645$ que separa las zonas de aceptación y rechazo. Lo observamos en un dibujo:



Etapa 3 y 4: En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}} =$

$$= \frac{0'24 - 0'26}{\sqrt{\dfrac{0'26 \cdot 0'74}{1000}}} \cong -1'44.$$

b)
Con este nivel de significación ¿podría aceptarse el informe del Ayuntamiento?

Etapa 5: Como el **valor observado del estadístico de prueba** $z_0 = -1'44$ es mayor que el **valor crítico** $z_\alpha = - z_{1-\alpha} = - 1'645$, vemos que nos encontramos en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de la aceptar hipótesis nula H_0:** $p_0 \ge 0'26$**, y aceptamos el informe del Ayuntamiento.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos que más del 26% de los usuarios del carril bici habrían utilizado el coche particular para sus desplazamientos de no haber existido dicho carril.