SOLUCIONES Modelo 2 PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DEL AÑO 2010-2011 ANDALUCÍA MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1'25 puntos) Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_3 - A)^3$.

b) (1'25 puntos) Dadas las matrices B = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, determine *a* y *b* de manera que B.C - D = O, siendo *O* la matriz nula.

Solución

a)

Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule $(I_3 - A)^3$.

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 - A)^3 = (I_3 - A).(I_3 - A).(I_3 - A) = .\begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De donde $(I_3 - A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b)

Dadas las matrices B = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, D = $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, determine *a* y *b* de manera que B.C - D = O, siendo *O* la matriz nula.

B.C – D = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-1 \\ -b+9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-6 \\ -b-1 \end{pmatrix}$. Igualando miembro a miembro tenemos:

3a – 6 = 0, de donde **a = 2.**

-b – 1 = 0, de donde **b = - 1.**

EJERCICIO 2

Un banco lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad R(x), en miles de euros, viene dada en función de la cantidad, *x*, que se invierte, también en miles de euros, por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0'001x^2 + 0'4x + 3'5, \text{ con } x \geq 10.$$

a) (0'5 puntos) Calcule la rentabilidad para una inversión de 100000 euros.

b) (1'5 puntos) Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.

c) (0'5 puntos) ¿Qué rentabilidad máxima se obtendría?

Solución

Rentabilidad = $R(x) = -0'001x^2 + 0'4x + 3'5$, con $x \geq 10$. Observamos que su gráfica es una parábola con las ramas hacia abajo ($\cap$), pues el número que multiplica a x^2 es negativo.

a)

Calcule la rentabilidad para una inversión de 100000 euros. Como la función está dada en miles de euros tenemos que x = 100.

Rentabilidad = R(100) = - 0'001$(100)^2$ + 0'4(100) + 3'5 = 33'5, es decir 33500 €.

(b) y (c)
Deduzca y razone qué cantidad habría que invertir para obtener la máxima rentabilidad.

Sabemos que la máxima rentabilidad se obtiene en el extremo x = 10, ó en el vértice de la parábola, cuya abscisa es la solución de R'(x) = 0

R(x) = - 0'001x^2 + 0'4x + 3'5
R'(x) = - 0'002x + 0'4, de R'(x) = 0 obtenemos - 0'002x + 0'4 = 0, de donde x = 0'4/0'002 = 200.

Sustituimos en 10 y 200.
R(10) = - 0'001$(10)^2$ + 0'4(10) + 3'5 = 7'4, es decir 7400 €
R(200) = - 0'001$(200)^2$ + 0'4(200) + 3'5 43'5, es decir 43500 €.

La máxima rentabilidad es de 43500 €, y se obtiene con una inversión de 200000 €.

EJERCICIO 3
Un jugador lanza a la vez un dado y una moneda.
a) (1 punto) Construya el espacio muestral de este experimento aleatorio.
b) (1 punto) Determine la probabilidad del suceso A: "El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda".
c) (0'5 puntos) Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

Solución

Llamamos "C", "X" e "i" a los sucesos "salir cara al lanzar la moneda", "salir cruz al lanzar la maneda" y "salir el número "i" al lanzar el dado
a)
Construya el espacio muestral de este experimento aleatorio.

El espacio muestral es E = {1C,2C,3C,4C,5C,6C,1X,2X,3X,4X,5X,6X}
b)
Determine la probabilidad del suceso A: "El jugador obtiene un número par en el dado y cruz en la moneda".

P(A) = 3/12 = 1/4. (nº de casos favorables partido nº de casos posibles)
c)
Si sabemos que en la moneda ha salido cara, ¿cuál es la probabilidad de que en el dado haya salido más de 3 puntos?

P(>3/cara) = 3/6 = 1/2. (nº de casos favorables partido nº de casos posibles, pero sólo de las caras)

EJERCICIO 4
En un distrito universitario, la calificación de los alumnos sigue una distribución Normal de media 6'2 puntos y desviación típica de 1 punto. Se seleccionó, aleatoriamente, una muestra de tamaño 25.
a) (1 punto) Indique la distribución de la media de las muestras de tamaño 25.
b) (1'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la media de las calificaciones de los alumnos de una de esas muestras esté comprendida entre 6 y 6'6 puntos?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ** el *estimador media muestral* $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$,

generalmente se suele escribir $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Datos media poblacional μ = 6'2, desviación típica σ = 1, tamaño muestra n = 25
a)
Indique la distribución de la media de las muestras de tamaño 25.

A distribución de la media de las muestras es $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = N(6'2, \frac{1}{\sqrt{25}}) = N(6'2, 1/5)$

b)
¿Cuál es la probabilidad de que la media de las calificaciones de los alumnos de una de esas muestras esté comprendida entre 6 y 6'6 puntos?

Me están pidiendo $p(6 < \overline{X} < 6'6)$ = {tipificamos} = $p\left(\frac{6 - 6'2}{1/5} < Z < \frac{6'6 - 6'2}{1/5}\right) = p(-1 < Z < 2) =$
$= p(Z < 2) - p(Z < -1) = p(Z < 2) – [1 - p(Z < 1)] =$ {mirando en la tabla de la normal N(0,1) } =
$= 0'97725 – [1 – 0'84134] = 0'81859$

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) (1'5 puntos) Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$y \geq 200 – 2x,\quad x – 100 \leq 3y,\quad x + 2y \leq 600,\quad x \geq 0.$$

b) (1 punto) Sabiendo que A(0,2), B(1,4), C(3,4), D(4,2) y E(2,1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función $F(x,y) = 10x + 5y + 21$, e indique los puntos donde se alcanzan.

Solución

a)
Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

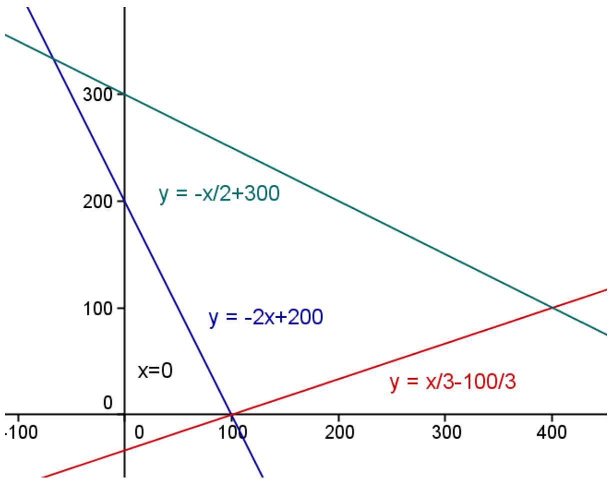
$$y \geq 200 – 2x,\quad x – 100 \leq 3y,\quad x + 2y \leq 600,\quad x \geq 0.$$

Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible.

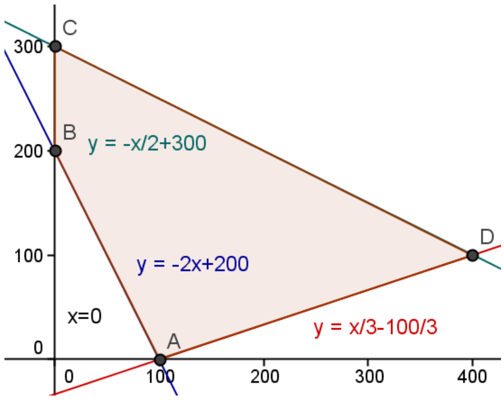
Inecuaciones : $y \geq 200 – 2x,\quad x – 100 \leq 3y,\quad x + 2y \leq 600,\quad x \geq 0$

Rectas: $y = 200 – 2x,\quad x/3 – 100/3 = y,\quad y = -x/2 + 300,\quad x \geq 0;\ x = 0$ (eje OY)

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades "$y \geq 200 – 2x,\quad y \geq x/3 – 100/3,\quad y \leq -x/2+300;\quad x \geq 0$", vemos que el recinto factible, y los vértices A, B, C y D de dicha región son:



De y= -2x+200 e y=x/3-100/3, tenemos -2x+200 = x/3-100/3, es decir -6x+600 = x-100, luego 7x = 700, por tanto x = 100 e y = -2(100)+200 = 0, y el punto de corte A(200,0)
De y= -2x+200 y x = 0, tenemos y = 200, y el punto de corte B(0,200)
De y= -x/2+300 y x = 0, tenemos y = 300, y el punto de corte C(0,300)

De y= -x/2+300 e y = x/3-100/3, tenemos -x/2+300 = x/3-100/3, de donde -3x+1800 = 2x-200, es decir 5x=2000, luego x = 400 e y = -(400)/2+300 = 100, y el punto de corte D(400,100)

El recinto tiene por vértices A(200,0), B(0,200), C(0,300) y D(400,100).

b)
Sabiendo que A(0,2), B(1,4), C(3,4), D(4,2) y E(2,1) son los vértices de una región factible, determine en ella el mínimo y el máximo de la función F(x,y) = 10x + 5y + 21, e indique los puntos donde se alcanzan.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(0,2) = 10(0) + 5(2) + 21 = 31, F(1,4) = 10(1) + 5(4) + 21 = 51, F(3,4) = 10(3) + 5(4) + 21= 71
F(4,2) = 10(4) + 5(2) + 21= 71, F(2,1) = 10(2) + 5(1) + 21= 46.

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 71** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en los puntos (3,4) y (4,2), luego todo el segmento que une dichos vértices es solución. El mínimo absoluto es 31 y se alcanza en el punto (0,2).**

EJERCICIO 2

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

a) (0’75 puntos) Calcule el valor de *a* para que *f* sea continua en *x* = 1.
b) (1’75 puntos) Para *a* = 2 estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.

Solución

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 - 2ax + 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

a)
Calcule el valor de *a* para que *f* sea continua en *x* = 1.

Como f es continua en x = 1 tenemos que:

$$f(1) = \lim_{x\to1^-} [f(x)] = \lim_{x\to1^+} [f(x)]$$

$f(1) = \lim_{x\to1^-} [f(x)] = \lim_{x\to1^-} [1 - 2x^2] = 1 - 2 = -1$
$\lim_{x\to1^+} [f(x)] = \lim_{x\to1^+} [x^2 - 2ax + 3] = 1 - 2a + 3 = 4 - 2a$.
Como es continua, igualando tenemos -1 = 4 – 2a, de donde **a = 5/2**.

b)

Para *a* = 2 estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.

Sea la función $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

$1 - 2x^2$ es un función polinómica por tanto continua y derivable en R, en particular en $x < 1$.
$x^2 - 4x + 3$ es un función polinómica por tanto continua y derivable en R, en particular en $1 < x < 3$.
$-x^2 + 8x - 15$ es un función polinómica por tanto continua y derivable en R, en particular en $x > 3$..

Veamos primero la continuidad.
Ya hemos visto que f es continua en x = 1, si a = 5/2, luego para a = 2 la función no es continua ni derivable en x = 1.

f es continua en x = 3 si se verifica que:

$$f(3) = \lim_{x\to 3^-} [f(x)] = \lim_{x\to 3^+} [f(x)]$$

$f(3) = \lim_{x\to 3^-} [f(x)] = \lim_{x\to 3^-} [x^2 - 4x + 3] = 9 - 12 + 3 = 0$
$\lim_{x\to 3^+} [f(x)] = \lim_{x\to 3^+} [-x^2 + 8x - 15] = -9 + 24 - 15 = 0$, por tanto f es continua en x = 3**. Luego f es continua en R, por tanto f es continua en R - {1}**

Sólo nos falta ver la derivabilidad x = 3.

$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad 1 < x \le 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$. $\quad f'(x) = \begin{cases} -4x & \text{si} \quad x < 1 \\ 2x - 4 & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ -2x + 8 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$.

Para que f sea derivable en x = 3 tenemos que: $f'(3^-) = f'(3^+)$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido
$f'(3^-) = \lim_{x\to 3^-} [f'(x)] = \lim_{x\to 3^-} [2 - 4x] = 2 - 12 = -10$.
$f'(3^+) = \lim_{x\to 3^+} [f'(x)] = \lim_{x\to 3^+} [-2x + 8] = -6 + 8 = -2$.
Como $f'(3^-) \ne f'(3^+)$, f no es derivable en x = 3, **luego f es derivable en R – {1,3}.**

EJERCICIO 3

Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.
a) (1'25 puntos) Calcule la probabilidad de que gane Ana.
b) (1 punto) Calcule la probabilidad de que gane Manolo.
c) (0'25 puntos) Calcule la probabilidad de que haya empate.

Solución

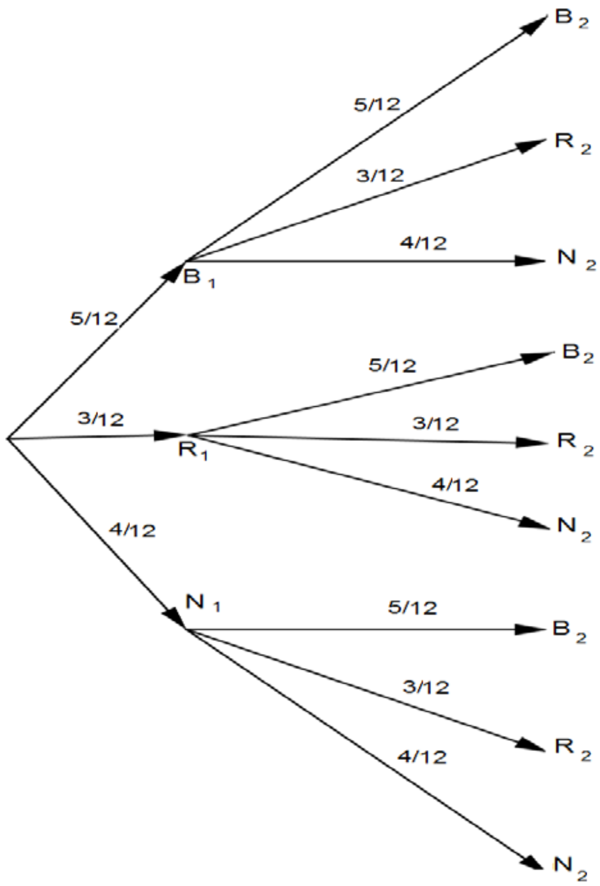
Una bolsa contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras. Ana y Manolo practican el siguiente juego: Ana saca una bola, anota su color y la devuelve a la bolsa, a continuación Manolo extrae una bola y anota su color. Si las dos bolas extraídas tienen el mismo color gana Ana, si sólo hay una bola blanca gana Manolo, y en otro caso hay empate.

Llamemos B_1 , R_1 , N_1, B_2 , R_2 y N_2, "Ana saca bola blanca", "Ana saca bola roja", "Ana saca bola negra", "Manolo saca bola blanca", "Manolo saca bola roja" y "Manolo saca bola negra"

Del enunciado vemos que $p(B_1) = 5/12$, $p(R_1) = 3/12$, $p(N_1) = 4/12$, $p(B_2) = 5/12$, $p(R_2) = 3/12$ y $p(N_2) = 4/12$.

Todo esto se observa mejor en el siguiente diagrama de árbol.

Tenemos en cuenta que como se devuelve la bola, cuando extrae Manolo la bola la composición de la bolsa no ha variado, de ahí que las probabilidades sean las mismas.



a)
Calcule la probabilidad de que gane Ana.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:

p(Gana Ana) = p(mismo color) = p(B_1 y B_2) + p(R_1 y R_2) + p(N_1 y N_2) =
= (5/12)(5/12) + (3/12)(3/12) + (4/12)(4/12) = **25/72**.
b)
Calcule la probabilidad de que gane Manolo.

p(Gana Manolo) = p(solo una blanca) = p(B_1 y R_2) + p(B_1 y N_2) + p(R_1 y B_2) + p(N_1 y B_2) =
= (5/12)(3/12) + (5/12)(4/12) + (3/12)(5/12) + (4/12)(5/12) = **35/72**.
c)
Calcule la probabilidad de que haya empate.

p(Empate) = p(cualquier otro caso) = p(R_1 y N_2) + p (N_1 y R_2) = (3/12)(4/12) + (4/12)(3/12) = **1/6**.

EJERCICIO 4
(2’5 puntos) Un estudio sociológico afirma que el 70% de las familias cena viendo la televisión. Se desea contrastar la veracidad de esta afirmación y, para ello, se toma una muestra de 500 familias, en la que se observa que 340 ven la televisión mientras cenan. Decida, mediante un contraste de hipótesis, si la afirmación es cierta con un nivel de significación de 0’01.

Solución

(a), (b) y (c)

Datos del problema: p_0 = 70% = 0’7; n = 500; $\hat{p}$ = 340/500 = 0’68; α = 0’01

Etapa 1: Las hipótesis nula y alternativa son: H_0: p_0 = 0’7 (el 70% cena viendo la TV) y H_1: $p_0 \neq$ 0’7, la cual nos indica la dirección del contraste, es decir es un contraste de hipótesis bilateral por tanto la región crítica también es bilateral.

Etapa 2: El nivel de significación es α = 0'01, de donde $\alpha/2$ = 0'005, luego tenemos 1 - $\alpha/2$ = 0,995.

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha/2$ = 1 – 0'005 = 0'995, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'99506, que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'58, con lo cual **tenemos dos valores críticos, el valor crítico $z_{1-\alpha/2}$ = 2'58 y el valor es $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ = -2'58**; por tanto l**a región crítica** está formada por los **números mayores de 2'58** y también por los **números menores a - 2'58,** que separan las zonas de aceptación y rechazo.

Etapa 3 y 4: En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0.(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{0'68 - 0'7}{\sqrt{\dfrac{0'7.0'3}{500}}} =$

= -0'975.

Etapa 5: Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -0'975 es mayor que el **valor crítico** $z_{\alpha/2}$= -2,58, vemos que se encuentra en la zona de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de aceptar hipótesis nula H_0: p_0 = 0'7**. Con lo cual *con una probabilidad de equivocarnos del 1%* **afirmamos que el 70% de las familias cena viendo la TV.**