# SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2012 (MODELO 2)

## OPCIÓN A

### EJERCICIO 1_A

**(2'5 puntos)** Halle la matriz *X* que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$, siendo *A*, *B* y *C* las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$.

**Solución**

(a)

Halle la matriz *X* que verifique la ecuación matricial $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix}$

S la matriz A tiene matriz inversa $A^{-1}$, (podemos pasar de $(A|I_2)$ mediante transformaciones elementales a $(I_2|B)$, la matriz B es $A^{-1}$), podemos multiplicar la expresión matricial $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$ por la izquierda por la matriz $(A^{-1})^2$.

$(A|I_2) = \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 2 & 0 & 1\end{array}\right)_{F_2/2} \approx \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1/2\end{array}\right) \approx^{F_1-1\cdot F_2} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & -1/2\\0 & 1 & 0 & 1/2\end{array}\right) = (I_2|A^{-1})$, por tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix}$.

También se puede calcular la matriz inversa por la fórmula $A^{-1} = (1/|A|)\cdot Adj(A^T)$, usando determinantes.

$|A| = \begin{vmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$; $A^T = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}$; $Adj(A^T) = \begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$; $A^{-1} = (1/2)\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix}$.

De $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$, tenemos $(A^{-1})^2 \cdot A^2 \cdot X = (A^{-1})^2 \cdot A - (A^{-1})^2 \cdot B \cdot C \rightarrow I_2 \cdot X = I_2 \cdot A^{-1} - (A^{-1})^2 \cdot B \cdot C \rightarrow$
$X = A^{-1} - (A^{-1})^2 \cdot B \cdot C$

$(A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -3/4\\0 & 1/4\end{pmatrix}$; $B \cdot C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 1\\2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 1\end{pmatrix}$

Luego $X = A^{-1} - (A^{-1})^2 \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & -3/4\\0 & 1/4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1/2\\0 & 1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-5 & -3/4\\2 & 1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 1/4\\-2 & 1/4\end{pmatrix}$

### EJERCICIO 2_A

Se considera la función $f(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$.

a) **(0'8 puntos)** Determine la monotonía y curvatura de la función.
b) **(0'8 puntos)** Calcule sus asíntotas.
c) **(0'9 puntos)** Represéntela gráficamente.

**Solución**

(a)

Determine la monotonía y curvatura de la función.

*Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x).*

$f(x) = 1 - \frac{2}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = \frac{x}{x+2}$. Vemos que no existe en x = -2.

$f(x) = \frac{x}{x+2}$.; $f'(x) = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

Si f '(x) = 0; tenemos **2 = 0**, lo cual no tiene sentido, luego no hay ningún nº que anule la 1ª derivada, por tanto no tiene extremos y siempre es creciente o decreciente.

Como f '(0) = 2/(+) > 0, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en R – {-2}.

*Me están pidiendo la curvatura, que es el estudio de f ''(x).*

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$; $f''(x) = \dfrac{0 - 2\cdot 2\cdot(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{-4\cdot(x+2)}{(x+2)^4}$

Si f ''(x) = 0; tenemos -4(x+2) = 0, de donde x + 2 = 0, luego **x = -2**, que **no puede ser el punto de inflexión**, porque en x = -2 no está definida la función (veremos que es una asíntota vertical).

Como f ''(-3) = 4/(+) > 0, f(x) es convexa (∪)en (-∞,-2).
Como f ''(0) = – 8/(+) < 0, f(x) es cóncava (∩) en (-2,+ ∞).

(b)
Calcule sus asíntotas.

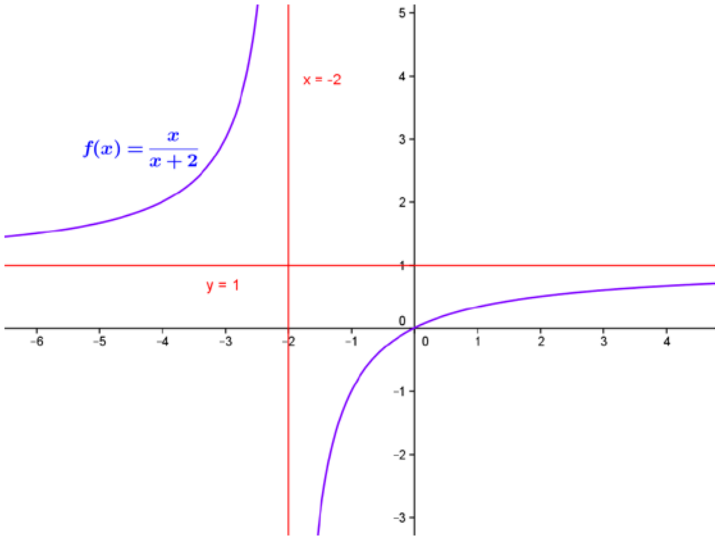
$f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

Como $\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \dfrac{x}{x+2} = -2/0^- = +\infty$, la recta **x = -2 es una asíntota vertical de f**

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \dfrac{x}{x+2} = -2/0^+ = -\infty$

Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$, la recta **y = 1 es una asíntota horizontal de f** en +∞. Como la función es un cociente de funciones polinómicas la asíntota horizontal es la misma en -∞.
Como tiene asíntotas horizontales, **no tiene asíntotas oblicuas** (podría tenerlas si fuese una función a trozos)
c)
Represéntela gráficamente.

Con los datos anteriores es suficiente para esbozar la gráfica, no obstante le daremos dar un par de valores a izquierda y derecha de la asíntota vertical x = -2.
f(-3) = -3/-1 = 3.     f(0) = 0
Un esbozo sería




**EJERCICIO 3_A**
Se ha impartido un curso de "conducción eficiente" a 200 personas. De los asistentes al curso, 60 son profesores de autoescuela y, de ellos, el 95% han mejorado su conducción. Este porcentaje baja al 80% en el resto de los asistentes. Halle la probabilidad de que, elegido un asistente al azar:
a) **(1'25 puntos)** No haya mejorado su conducción.
b) **(1'25 puntos)** No sea profesor de autoescuela, sabiendo que ha mejorado su conducción.

**Solución**

Se ha impartido un curso de "conducción eficiente" a 200 personas. De los asistentes al curso, 60 son profesores de autoescuela y, de ellos, el 95% han mejorado su conducción. Este porcentaje baja al 80% en el resto de los asistentes. Halle la probabilidad de que, elegido un asistente al azar:

Total personas de "conducción eficiente" = 200
Total profesores de auto escuela = 60. Resto = 200 – 60 = **140**
El 95% de profesores ha mejorado la conducción = 60·(95/100) = 57. Mejorar conducción = B

El 80% de los no profesores ha mejorado la conducción = 140·(80/100) = 112.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

| | Profesores = Pr | No profesores = $Pr^C$ | Totales |
|---|---|---|---|
| Mejorar conducción = B | 57 | 112 | |
| No mejorar conducción = $B^C$ | | | |
| Totales | 60 | | 200 |

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

| | Profesores = Pr | No profesores = $Pr^C$ | Totales |
|---|---|---|---|
| Mejorar conducción = B | 57 | 112 | **169** |
| No mejorar conducción = $B^C$ | **3** | **28** | **31** |
| Totales | 60 | **140** | 200 |

(a)
No haya mejorado su conducción.

**p(“no mejora conducción) = p("$B^C$") =** $\dfrac{\text{Número total de no mejoran la conducción}}{\text{Número total de personas}} = \dfrac{31}{200}$ **= 0’155.**

(b)
No sea profesor de autoescuela, sabiendo que ha mejorado su conducción.

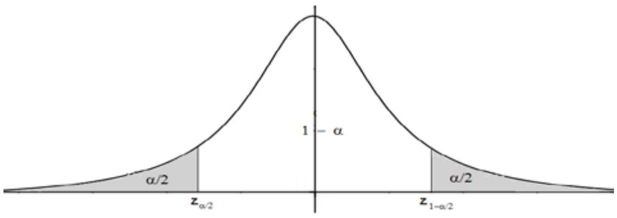
**p("No profesor sabiendo que ha mejorado") =** $\dfrac{\text{No profesores que han mejorado}}{\text{Total de han mejorado la conducción}} = \dfrac{112}{169}$ **≅ 0’6627.**

## EJERCICIO 4_A

Se acepta que los rendimientos anuales, medidos en porcentajes, que producen los depósitos bancarios a plazo, se distribuyen según una ley Normal con desviación típica 1’8 y se pretende realizar una estimación del rendimiento medio de los mismos. Para ello, se tiene una muestra de 36 entidades bancarias en las que se observa que el rendimiento medio de los depósitos es del 2’5.
a) **(1’5 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para el rendimiento medio de los depósitos a plazo. ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación?
b) **(1 punto)** Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar el rendimiento medio de los depósitos con un error máximo de 0’5?

**Solución**

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$




También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

*También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$*.*

Se acepta que los rendimientos anuales, medidos en porcentajes, que producen los depósitos bancarios a plazo, se distribuyen según una ley Normal con desviación típica 1’8 y se pretende realizar una estimación del rendimiento medio de los mismos. Para ello, se tiene una muestra de 36 entidades bancarias en las que se observa que el rendimiento medio de los depósitos es del 2’5.

(a)
Calcule un intervalo de confianza, al 96%, para el rendimiento medio de los depósitos a plazo. ¿Cuál es el error máximo cometido en la estimación?

Datos del problema: $\sigma$ = 1'8; n = 36; $\overline{x}$ = 2'5; nivel de confianza = 96% = 0'96 = 1 - $\alpha$, de donde $\alpha$ = 0'04, con la cual $\alpha$/2 = 0'02

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - $\alpha$/2 = 1 - 0'02 = 0'98, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'98 vemos que no viene, sin embargo la más próxima que viene es 0'9798 que corresponde a $z_{1-\alpha/2}$ = 2'05, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

**I.C. (μ)** = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2'5 - 2'05\cdot\frac{1'8}{\sqrt{36}}, 2'5 + 2'05\cdot\frac{1'8}{\sqrt{36}}\right)$ **= (1'885,3'115).**

**El error cometido es E <** $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'05\cdot\frac{1'8}{\sqrt{36}}$ **= 0'615.**

(b)
Manteniendo el mismo nivel de confianza, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para estimar el rendimiento medio de los depósitos con un error máximo de 0'5?

Datos del problema: $\sigma$ = 1'8; igual nivel de confianza el mismo, luego $z_{1-\alpha/2}$ = 2'05; Error = E < 0'5

Por tanto tamaño mínimo pedido es: $n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2'05 \cdot 1'8}{0'5}\right)^2 \cong 54'46$, es decir **el tamaño mínimo es n= 55 entidades financieras**.

## OPCIÓN B

### EJERCICIO 1_B

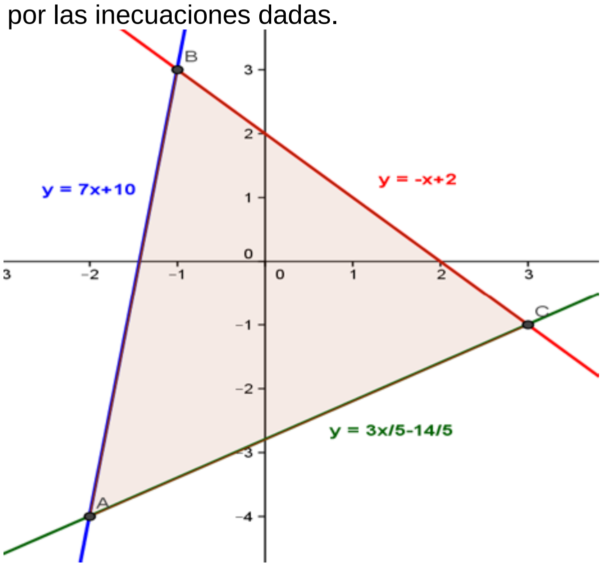
a) **(1'9 puntos)** Represente la región definida por las siguientes inecuaciones
$7x - y \ge -10$; $x + y \le 2$; $3x - 5y \le 14$ y determine sus vértices.
b) **(0'6 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función F(x,y) = 2x+ 3y en dicha región.

**Solución**

(a)
Represente la región definida por las siguientes inecuaciones $7x - y \ge -10$; $x + y \le 2$; $3x - 5y \le 14$ y determine sus vértices.

Las desigualdades $7x - y \ge -10$; $x + y \le 2$; $3x - 5y \le 14$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, $7x - y \ge -10$; $x + y \le 2$; $3x - 5y \le 14$.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
$y = 7x + 10$; $y = -x + 2$; $y = 3x/5 - 14/5$;
Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De y = 3x/5 – 14/5 e y = 7x + 10; tenemos 3x/5 – 14/5 = 7x + 10, de donde "3x-14 = 35x+50", es decir sale -64 = 32x, de donde "x = -2" e "y = -4", y **el punto de corte es A(-2,-4)**

De y = 7x + 10 e y = -x + 2; tenemos 7x + 10 = -x + 2, de donde "8x = -8", es decir sale "x = -1" e "y = 3", y **el punto de corte es B(-1,3)**

De y = 3x/5 – 14/5 e y = -x + 2; tenemos 3x/5 – 14/5 = -x + 2, de donde "3x-14 = -5x+10", es decir sale 8x=24, de donde "x = 3" e "y = -1", y **el punto de corte es C(3,-1)**

Fijándonos en la resolución de las ecuaciones, **los vértices del recinto son: A(-2,-4); B(-1,3) y el C(3,-1).**
b)
Calcule los valores máximo y mínimo que alcanza la función F(x,y) = 2x+ 3y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(-2,-4); B(-1,3) y el C(3,-1).

F(-2,-4) = 2(-2)+ 3(-4) **= -16,** F(-1,3) = 2(-1)+ 3(3) **= 7,** F(3,-1) = 2(3)+ 3(-1) = 3

**Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el mínimo absoluto de la función F en la región es -16 (el valor menor en los vértices) y se alcanza en el vértice A(-2,-4), y el máximo absoluto es 7 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el punto B(-1,3).**

## EJERCICIO 2_B

Sea $P(t)$ el porcentaje de células, de un determinado tejido, afectadas por un cierto tipo de enfermedad transcurrido un tiempo $t$, medido en meses:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & \text{si } t > 5 \end{cases}.$$

a) **(0'5 puntos)** Estudie la continuidad de la función *P*.
b) **(0'75 puntos)** Estudie la derivabilidad de *P* en *t* =5.
c) **(0'75 puntos)** Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.
d) **(0'5 puntos)** ¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

**Solución**

Sea f la función definida por $P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & \text{si } t > 5 \end{cases}.$

(a)
Estudie la continuidad de la función *P*.

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 5 \\ \dfrac{100t-250}{t+5} & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

$t^2$ es continua en R en particular en $0 \le t < 5$

$\dfrac{100t-250}{t+5}$ es continua en R – {-5}, en particular en t > 5

Veamos la continuidad en t = 5

f es continua en t = 5 si $P(5) = \lim_{t \to 5} P(t)$

$P(5) = \lim_{t\to 5^-} P(t) = \lim_{t\to 5^-} (t^2) = 25$

$\lim_{t\to 5^+} P(t) = \lim_{t\to 5^+} \left(\frac{100t-250}{t+5}\right)$ = 250/10 = 25, luego P(t) **es continua** en t = 5, y por tanto en **$0 \le t < +\infty$.**

(b)

Estudie la derivabilidad de *P* en *t* =5.

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \le t \le 5 \\ \frac{100t-250}{t+5} & \text{si } t > 5 \end{cases} ; P'(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 5 \\ \frac{100(t+5)-(100t-250)\cdot 1}{(t+5)^2} & \text{si } t > 5 \end{cases} = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 < t < 5 \\ \frac{750}{(t+5)^2} & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

Para que P sea derivable en t = 5, $P'(5^+) = P'(5^-)$. Vemos la continuidad de la derivada.

$P'(5^-) = \lim_{t\to 5^-} P'(t) = \lim_{t\to 5^-} (2t) = 10.$

$P'(5^+) = \lim_{t\to 5^+} P'(t) = \lim_{t\to 5^-} \left(\frac{750}{(t+5)^2}\right)$ = 750/100 = 7'5. Como $P'(5^+) \neq P'(5^-)$, **no existe P'(5).**

(c)

Estudie la monotonía de dicha función e interprete la evolución del porcentaje de células afectadas.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x).

Si 0 < t < 5, P'(t) = 2t

De P'(t) = 0; tenemos 2t = 0, de donde **t = 0**, que puede un extremos relativo ó absoluto.

Como P '(1) = 2 > 0, **luego P(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en 0 < t < 5.**

Si t > 5, $P'(t) = \frac{750}{(t+5)^2}$

De P'(t) = 0; tenemos **750 = 0**, lo cual es absurdo luego P(t) siempre es creciente o siempre decreciente.

Como P '(6) = 750/ > 0, **luego P(t) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en t > 5, por tanto P(t) siempre es creciente.**

d)

¿En algún momento el porcentaje de células afectadas podría valer 50?

Igualmos 50 a $\frac{100t-250}{t+5}$, es decir $50 = \frac{100t-250}{t+5}$, de donde 50t + 250 = 100t – 250, luego 50t = 500, por tanto t = 10, **es decir al cabo de 10 meses el porcentaje de células es 50.**

## EJERCICIO 3_B

Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres. También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también están en paro.

a) **(1'25 puntos)** Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcule la probabilidad de que esté en paro.

b) **(1'25 puntos)** Si hemos elegido, al azar, una persona que trabaja, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

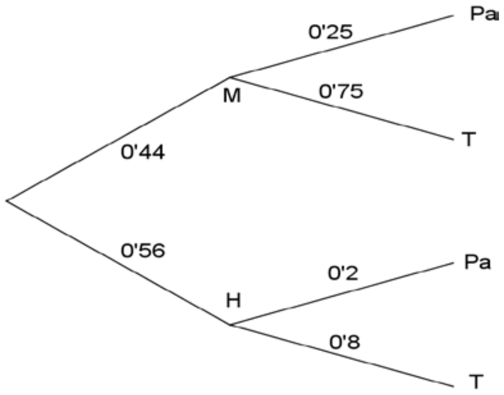
**Solución**

Se sabe que el 44% de la población activa de cierta provincia está formada por mujeres. También se sabe que, de ellas, el 25% está en paro y que el 20% de los hombres de la población activa también están en paro.

Llamemos H**,** M, Pa y T = $(Pa)^C$, a los sucesos siguientes, "ser hombre", " ser mujer ", " estar en paro " y " no estar en paro ", respectivamente.

Además tenemos p(M) = 44% = 0'44, p(Pa/M) = 25% = 0'25, p(Pa/H) = 20% = 0'20

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).




a)
Elegida, al azar, una persona de la población activa de esa provincia, calcule la probabilidad de que esté en paro.

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que la bola extraída sea negra (N) es:

**p(Pa) =** p(M).p(Pa/M) + p(H).p(Pa/H) = 0'44·0'25 + 0'56·0'2 = **0'222.**

b)
Si hemos elegido, al azar, una persona que trabaja, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre?

**Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:**

$$\textbf{p(H/T) =} \frac{p(H\cap T)}{p(T)} = \frac{p(H).p(T/H)}{1 - p(Pa)} = \frac{0'56\cdot 0'8}{1 - 0'222} \cong \mathbf{0'5758}.$$

## EJERCICIO 4_B

a) **(1 punto)** En una ciudad viven 400 hombres y 320 mujeres y se quiere seleccionar una muestra de tamaño 54 utilizando muestreo estratificado por sexos, con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?

b) **(1'5 puntos)** A partir de una población de elementos 1, 2, 3, 4 se seleccionan, mediante muestreo aleatorio simple, todas las muestras de tamaño 2.

Escriba dichas muestras y calcule la varianza de las medias muestrales.

### Solución

(a)
En una ciudad viven 400 hombres y 320 mujeres y se quiere seleccionar una muestra de tamaño 54 utilizando muestreo estratificado por sexos, con afijación proporcional, ¿cuál sería la composición de la muestra?

Sabemos que en un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional, si hay "k" estratos y que el número de elementos de cada estrato es $N_1$, $N_2$, ..., $N_k$, y si $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ son los elementos de cada una de las muestras de los estratos, el tamaño total de la muestra $n = n_1 + n_2, +...+ n_k$ y se calculan eligiendo los números $n_1$, $n_2$, ..., $n_k$ proporcionales a los tamaños de los estratos $N_1$, $N_2$, ..., $N_k$, es decir

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = .... = \frac{n_k}{N_k} = \frac{n}{N}$$

En nuestro caso $\frac{n_1}{400} = \frac{n_2}{320} = \frac{54}{720}$

De $\frac{n_1}{400} = \frac{54}{720}$, tenemos $n_1 = \frac{400\cdot 54}{720} = 30$, luego **hay que elegir 30 hombres**.

De $\frac{n_2}{320} = \frac{54}{720}$, tenemos $n_2 = \frac{320\cdot 54}{720} = 24$, luego **hay que elegir 24 mujeres**.

b)
A partir de una población de elementos 1, 2, 3, 4 se seleccionan, mediante muestreo aleatorio simple, todas las muestras de tamaño 2.
Escriba dichas muestras y calcule la varianza de las medias muestrales.

Construyamos la distribución muestral de medias y, para ello, calculamos la media de todas las muestras posibles con reemplazamiento de tamaño 2 que son 16. Los resultados pueden verse en la tabla siguiente:

| MUESTRAS | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Elementos | 1<br>1 | 1<br>2 | 1<br>3 | 1<br>4 | 2<br>1 | 2<br>2 | 2<br>3 | 2<br>4 | 3<br>1 | 3<br>2 | 3<br>3 | 3<br>4 | 4<br>1 | 4<br>2 | 4<br>3 | 4<br>4 |
| Media de la muestra $\overline{x}_i$ | 1 | 1’5 | 2 | 2’5 | 1’5 | 2 | 2’5 | 3 | 2 | 2’5 | 3 | 3’5 | 2’5 | 3 | 3’5 | 4 |

La distribución muestral de medias puede verse en la tabla que sigue.

| $x_i$ | $n_i$ | $n_i \cdot x_i$ | $n_i \cdot (x_i)^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1’5 | 2 | 3 | 4’5 |
| 2 | 3 | 6 | 12 |
| 2’5 | 4 | 10 | 25 |
| 3 | 3 | 9 | 27 |
| 3’5 | 2 | 7 | 24’5 |
| 4 | 1 | 4 | 16 |
| $\Sigma$ | **N=16** | **40** | **110** |

La media de la distribución muestral de medias (media de medias) es:

$$\mu = \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \frac{40}{16} = 5/2$$

La desviación típica de la distribución muestral de medias es:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum n_i \cdot (x_i)^2}{N} - \overline{x}^2} = \sqrt{\frac{110}{16} - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{8}} \cong \mathbf{0'79056}$$