PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD DEL AÑO 2010-2011 ANDALUCÍA
Modelo 3 de MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) (1'5 puntos) De una matriz cuadrada, *A*, de orden 3 se conocen los siguientes elementos

$$a_{12} = a_{21} = -2,\quad a_{13} = a_{31} = 0,\quad a_{23} = a_{32} = 1.$$

Determine los demás elementos de la matriz *A* sabiendo que debe cumplirse la ecuación $A.B = C^t$ donde $B^t = (1\ \ -1\ \ 1)$ y $C = (-4\ \ 2\ \ -1)$.

b) (1 punto) Calcule $2.D^2$, siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Solución

a)

De una matriz cuadrada, *A*, de orden 3 se conocen los siguientes elementos

$$a_{12} = a_{21} = -2,\quad a_{13} = a_{31} = 0,\quad a_{23} = a_{32} = 1.$$

Luego $A = \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ -2 & y & 1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$

Determine los demás elementos de la matriz *A* sabiendo que debe cumplirse la ecuación $A.B = C^t$ donde $B^t = (1\ \ -1\ \ 1)$ y $C = (-4\ \ 2\ \ -1)$.

De $A.B = C^t$, tenemos $\begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ -2 & y & 1 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, es decir $\begin{pmatrix} x+2 \\ -y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Igualando, miembro a miembro:

$x+2 = -4$, de donde $x = -6$
$-y-1 = 2$, de donde $y = -3$
$z-1 = -1$, de donde $z = 0$.

Por tanto la matriz A es $A = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b)

Calcule $2.D^2$, siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

$$2.D^2 = 2.D.D = 2.\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} -14 & 20 \\ -12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 & 40 \\ -24 & 20 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

El beneficio, en miles de euros, alcanzado en una tienda de ropa el pasado año, viene dado por la función B(t) expresada a continuación

$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si } 6 < t \le 12 \end{cases}$$, *t* es el tiempo transcurrido en meses.

a) (1 punto) Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.
b) (0'5 puntos) ¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?
c) (1 punto) Represente gráficamente la función B(t). ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

Solución

Sea la función $B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si } 0 \le t \le 6 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si } 6 < t \le 12 \end{cases}$, *t* es el tiempo transcurrido en meses.

a)

Estudie la derivabilidad de la función al cabo de 6 meses.

Si una función es derivable, sabemos que es continua, por tanto estudiamos primero la continuidad en x = 6.

B es continua en x = 6 sy y solo si (sii): $B(6) = \lim_{x\to 6-} [B(x)] = \lim_{x\to 6+} [B(x)]$

$B(6) = \lim_{x\to 6-} [B(x)] = \lim_{x\to 6-} [\ t^2/8 - t + 5\ ] = 36/8 - 8 + 5 = 7/2$
$\lim_{x\to 6+} [B(x)] = \lim_{x\to 6+} [\ (t + 1)/2 = (6 + 1)/2 = 7/2 - 2a + 3 = 4 - 2a.$
Como $B(6) = \lim_{x\to 6-} [B(x)] = \lim_{x\to 6+} [B(x)] = 7/2$, **B(t) es continua en t = 6**.

Veamos la derivabilidad en t = 6.

$$B(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t^2 - t + 5 & \text{si } \ 0 \le t \le 6 \\ \frac{t+1}{2} & \text{si } \ 6 < t \le 12 \end{cases}, \quad B'(t) = \begin{cases} t^2/4 - 1 & \text{si } \ 0 < t < 6 \\ \frac{1}{2} & \text{si } \ 6 < t < 12 \end{cases}.$$

Para que B sea derivable en t = 6 tenemos que: $B'(1^-) = B'(1^+)$

Vamos a utilizar la continuidad de la derivada que es más rápido.
$B'(6^-) = \lim_{x\to 6-} [B'(x)] = \lim_{x\to 6-} [t^2/4 - 1] = 36/4 - 1 = 8.$
$B'(6^+) = \lim_{x\to 6+} [B'(x)] = \lim_{x\to 6+} [\ 1/2\ ] = 1/2.$
Como $B'(1^-) \ne B'(1^+)$, **B no es derivable en t = 6**.

b)
¿Cuándo fue mínimo el beneficio? ¿Cuál fue dicho beneficio?

Sabemos que el mínimo absoluto de una función B(t) se encuentra entre los extremos del intervalo (**t = 0**, **t=12**), los puntos donde no es continua y derivable (**t = 6**) y también entre las soluciones de B'(t) = 0 (nos dán los posibles extremos relativos)
Si x < 6, $B(t) = t^2/8 - t + 5$, de donde $B'(t) = t/4 - 1$. De B'(t) = 0, tenemos t/4 – 1 = 0, luego **t = 4**. Sustituimos todos estos valores en B(t), pero cada uno en su rama.
$B(0) = (0)^2/8 - (0) + 5 = 5$
B(12) = (12 + 1)/2 = 13/2 = 6'5 , está en la rama de x > 6.
$B(6) = (6)^2/8 - (6) + 5 = 7/2 = 3'5$
$B(4) = (4)^2/8 - (4) + 5 = 3$

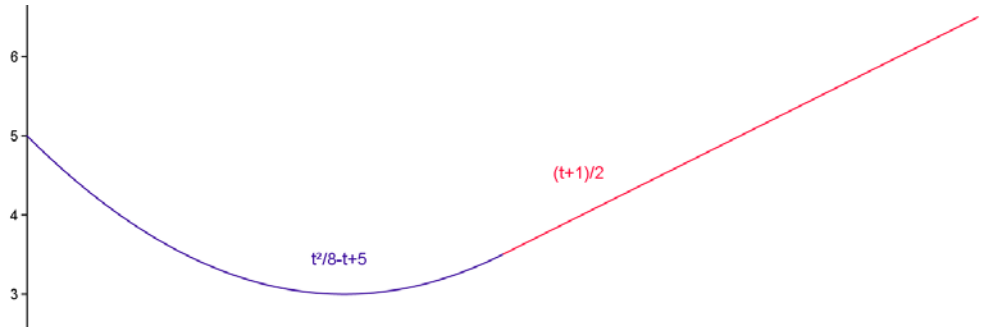
El beneficio mínimo es de 3000 € en un tiempo de 4 meses.
c)
Represente gráficamente la función B(t). ¿Cuándo fue máximo el beneficio? ¿A cuánto ascendió?

El máximo beneficio lo podemos obtener del apartado anterior y **es de 6500 € en un tiempo de 12 meses**.

Si x ≤ 6, tenemos $B(t) = t^2/8 - t + 5$ cuya gráfica es una parábola con las ramas hacia arriba (∪) porque el número que multiplica a t^2 es positivo, y vértice en el punto V(4,3), porque el vértice es un mínimo y anula la primera derivada, que ya hemos visto que era t = 4. Como las ramas van hacia arriba y el vértice es V(3,4), la gráfica de $B(t) = t^2/8 - t + 5$. Para terminar de terminar de dibujar esta rama le daríamos el valor t = 0 y t=6, cosa que ya hemos realizado.

Si x> 6, tenemos B(t) = (t + 1)/2, cuya gráfica es un segmento, por tanto con dos valores es suficiente. Tomamos $t = 6^+$ y t = 12.

Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica es:



EJERCICIO 3

En una ciudad, el 55% de la población consume aceite de oliva, el 30% de girasol, y el 20% ambos tipos de aceite. Se escoge una persona al azar:

a) (1 punto) Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?

b) (1 punto) Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

c) (0'5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

Solución

Sean "A" y "B", los sucesos "consume aceite de oliva" y "consume aceite de girasol".

De el 55% de la población consume aceite de oliva, tenemos p(A) = 55% = 0'55
De el 30% de la población consume aceite de girasol, tenemos p(B) = 30% = 0'3
De el 20% de la población consume ambos, tenemos $p(A\cap B)$ = 20% = 0'2

a)
Si consume aceite de oliva, ¿cuál es la probabilidad de que consuma también aceite de girasol?

Me están pidiendo $p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ = 0'2/0'55 ≅ 0'363636.

b)
Si consume aceite de girasol, ¿cuál es la probabilidad de que no consuma aceite de oliva?

Me están pidiendo $p(A^C/B) = \dfrac{p(A^C\cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B)\text{-}p(A\cap B)}{p(B)}$ = (0'3 – 0'2)/0'3 ≅ 0.333333.

c)
¿Cuál es la probabilidad de que no consuma ninguno de los dos tipos de aceite?

Me están pidiendo p(noA y noB) = $p\left(A^C\cap B^C\right)$ = {ley de Morgan} = $p((A\cup B)^C)$ = {contrario} =

= 1 – $p(A\cup B)$ = 1 – 0'65 = 0'35

Necesitamos $p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$ = 0'55 + 0'3 - 0'2 = 0'65.

EJERCICIO 4

El peso de los adultos de una determinada población sigue una distribución Normal de media 70 kg y desviación típica 16 kg. Si elegimos, al azar, muestras de tamaño 4,

a) (0'5 puntos) ¿cuál es la distribución de la media muestral?

b) (1 punto) ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 kg?

c) (1 punto) ¿cuál es la probabilidad de que ese peso medio sea menor que 70kg?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ** el *estimador media muestral* $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$,

generalmente se suele escribir $\overline{X} \rightarrow N(\mu , \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Datos: media poblacional μ = 70, desviación típica σ = 16, tamaño muestra n = 4.

a)
¿cuál es la distribución de la media muestral?

La distribución de la media muestral es N(μ , $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = N(70 , $\frac{16}{\sqrt{4}}$) = N(70 , 8)

b)

¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de una de esas muestras esté comprendido entre 65 y 72 kg?

Me están pidiendo p(65 < $\overline{X}$ < 72) = {tipificamos} = $p\left(\frac{65-70}{8} < Z < \frac{72-70}{8}\right)$ = p(-0'625 < Z < 0'25) = { tomamos sólo dos decimales} = p(-0'63 < Z < 0'25) = p(Z < 0'25) - p(Z < -0'63) =
= p(Z < 0'25) – [1 - p(Z < 0'63)] = {mirando en la tabla de la normal N(0,1) } = 0'59871 – [1- 0'73565] =
= 0.33436.

c)

¿cuál es la probabilidad de que ese peso medio sea menor que 70kg?

Me están pidiendo p($\overline{X}$ < 70) = {tipificamos} = $p\left(Z < \frac{70-70}{8}\right)$ = p(Z < 0) = { {mirando en la tabla de la normal N(0,1) } = 0'50000.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Se considera el recinto R del plano determinado por las siguientes inecuaciones:

$$13x + 8y \le 600; \quad 3(x-2) \ge 2(y-3); \quad x - 4y \le 0.$$

a) (1'75 puntos) Represente gráficamente el recinto R y calcule sus vértices.

b) (0'75 puntos) Calcule el valor máximo en dicho recinto de la función F(x,y) = 65x + 40y, indicando dónde se alcanza.

Solución

a)

Dibuje el recinto del plano definido por el siguiente sistema de inecuaciones y determine sus vértices:

$$13x + 8y \le 600; \quad 3(x-2) \ge 2(y-3); \quad x - 4y \le 0.$$

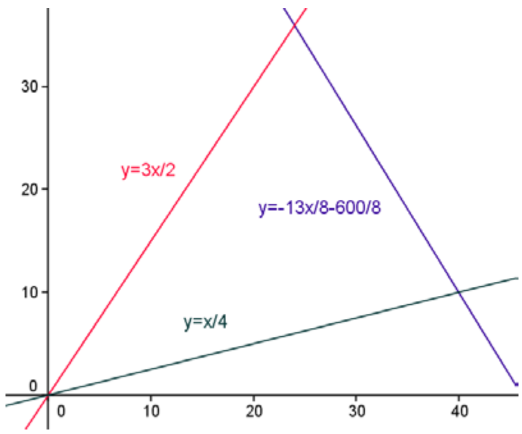
Para dibujar la región factible o recinto, de cada inecuación despejamos la incógnita "y" para dibujar la recta correspondiente, y después observando las inecuaciones tendremos la región factible.

Inecuaciones : $13x + 8y \le 600$; $3(x-2) \ge 2(y-3)$; $x - 4y \le 0$

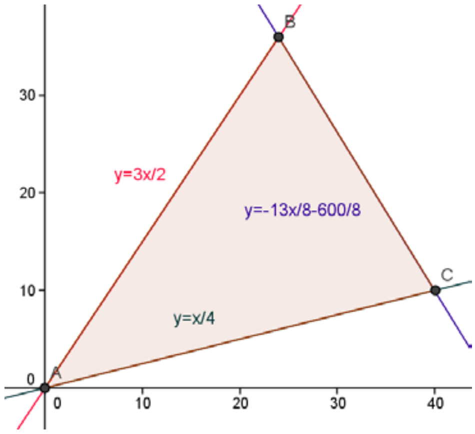
Rectas:

De 13x + 8y = 600 tenemos y = -13x/8 + 600/13, de 3(x – 2) ≥ 2(y – 3) tenemos y = 3x/2, la otra es y = x/4.

Dibujamos las rectas



Si nos fijamos en las desigualdades "y ≤ -13x/8 + 600/8, y ≤ 3x/2, y ≥ x/4", vemos que el recinto factible, y los vértices A, B y C de dicha región son:



De y= x/4 e y=3x/2, tenemos x/4 =3x/2, es decir x = 6x, luego x = 0, por tanto y = 0, y el punto de corte A(0,0)
De y= 3x/2 e y = -13x/8 + 600/8, tenemos 3x/2 = -13x/8 + 600/8, luego 12x = -13x + 600, por tanto 25x = 600, de donde x = 600/25 = 24 e y = 3(24)/2 = 36, y el punto de corte B(24,36)
De y= x/4 e y = -13x/8 + 600/8, tenemos x/4 = -13x/8 + 600/8, luego 2x = -13x + 600, por tanto 15x = 600, de donde x = 600/15 = 40 e y = (40)/4 = 10, y el punto de corte C(40,10)

El recinto tiene por vértices A(0,0), B(24,36) y C(40,10).
b)
Calcule el valor máximo en dicho recinto de la función F(x,y) = 65x + 40y, indicando dónde se alcanza.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que la función F alcanza su máximo y mínimo absoluto en la región acotada, y que este extremo debe estar situado en algún vértice del recinto (o en un segmento, si coincide en dos vértices consecutivos), por lo que evaluamos F en los puntos anteriores:

F(0,2) = 65(0) + 40(0) = 0, F(24,36) = 65(24) + 40(36) = 3000, F(40,10) = 65(40) + 40(10) = 3000.
Teniendo en cuenta lo anterior vemos que **el máximo absoluto de la función F en la región es 3000** (el valor mayor en los vértices) y **se alcanza en los puntos (24,36) y (40,10), luego todo el segmento que une los vértices (24,36) y (40,10) es solución.**

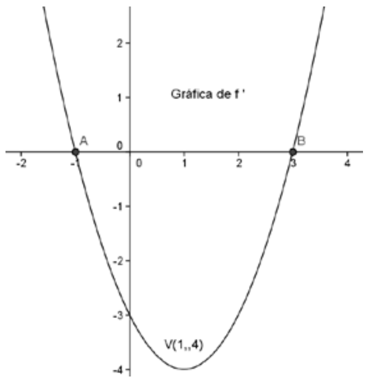
EJERCICIO 2

a) (1'5 puntos) La gráfica de la función derivada, *f ´*, de una función *f* es una parábola que corta al eje *OX* en los puntos (-1,0) y (3,0), y tiene su vértice en (1,-4).
Estudie, a partir de ella, la monotonía de la función *f* e indique la abscisa de cada extremo relativo.
b) (1 punto) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g(x) = -2.e^{3x} en el punto de abscisa *x* = 0.

Solución

a)
La gráfica de la función derivada, *f ´*, de una función *f* es una parábola que corta al eje *OX* en los puntos (-1,0) y (3,0), y tiene su vértice en (1,-4).
Estudie, a partir de ella, la monotonía de la función *f* e indique la abscisa de cada extremo relativo.

Con los datos que me han dado, vértice en (1,-4), corta al eje *OX* en (-1,0) y (3,0), observo que la parábola tiene las ramas hacia arriba (el vértice está debajo del eje OX), y un esbozo de ella sería:



Como f '(x) es positivo (encima del eje OX) en x < -1 y también en x > 3, resulta que f(x) es estrictamente creciente en x < -1 y también en x > 3,

Como f '(x) < 0 (debajo del eje OX) en -1 < x < 3, resulta que f(x) es estrictamente decreciente en -1 < x < 3.

Por definición en x = -1 hay un máximo relativo (a su izquierda f crece y a su derecha decrece).
Por definición en x = 3 hay un mínimo relativo (a su izquierda f decrece y a su derecha crece).

b)
Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = -2.e^{3x}$ en el punto de abscisa *x* = 0.

Sabemos que la recta tangente en x = 0 es "y – g(0) = g'(0)(x – 0)".

$g(x) = -2.e^{3x}$ de donde $g(0) = -2.e^0 = -2.1 = -2$.
$g'(x) = -2.e^{3x}.3 = -6.\ e^{3x}$, de donde $g'(0) = -6.e^0 = -6.1 = -6$.

La recta tangente pedida es: y – (-2) = -6(x – 0), es decir y = -6x – 2.

EJERCICIO 3

El 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía. De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión y de los que sí lo están, solamente un 5% fueron reparados anteriormente. Se elige un aparato al azar en el servicio técnico:
a) (1'25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido reparado en otra ocasión?
b) (1'25 puntos) Si es la primera vez que ha llegado al servicio técnico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en garantía?

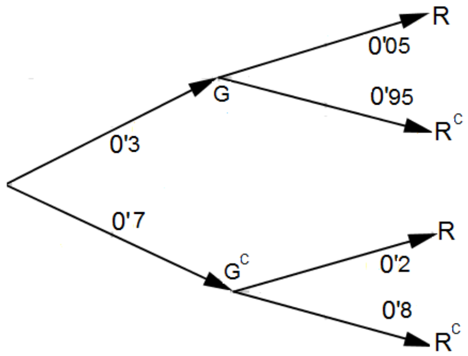
Solución

Llamemos G, G^C , R y R^C a los sucesos "aparato en garantía", "aparato sin garantía", "llevado alguna vez a reparar" y " no se ha llevado a reparar nunca".

De "el 30% de los aparatos que llegan a un servicio técnico para ser reparados están en garantía", tenemos p(G)= 30% =0'3, y por suceso contrario $p(G^C)$ = 1 - 0'3 = 0'7 = 70%.

De los que no están en garantía, el 20% ya fueron reparados en otra ocasión y de los que sí lo están, solamente un 5% fueron reparados anteriormente", tenemos $p(R/G^C)$ = 20% = 0'2 y p(R/G) = 5% = 0'05 .

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo valen 1).



a)
¿Cuál es la probabilidad de que haya sido reparado en otra ocasión?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de que no se produzcan retrasos es:

$$p(R) = p(G).p(R/G) + p(G^C).p(R/\ G^C) = (0'3)(0'05) + (0'7)(0'2) = 0'155.$$

b)
Si es la primera vez que ha llegado al servicio técnico, ¿cuál es la probabilidad de que esté en garantía?

Aplicando el teorema de Bayes, la probabilidad pedida es:

$$p(G/R^C) = \frac{p\left(G \cap R^C\right)}{p(R^C)} = \frac{p\left(G\right).p(R^C/G)}{p(R^C)} = \frac{0'3.0'95}{1 - 0'155} \cong 0'337278.$$

EJERCICIO 4

Con el fin de estudiar el peso medio de los perros recién nacidos de una determinada raza, se tomó una muestra en una clínica veterinaria y se obtuvieron los siguientes pesos, medidos en kg:

1'2 0'9 1 1'2 1'1 1 0'8 1'1

Se sabe que el peso de los cachorros de esta raza se distribuye según una ley Normal con desviación típica 0'25 kg.

a) (1'5 puntos) Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, al 95%.

b) (0'5 puntos) Halle el error máximo que se cometería usando el intervalo anterior.

c) (0'5 puntos) Razone cómo variaría la amplitud del intervalo de confianza si, manteniendo el mismo nivel de confianza, aumentásemos el tamaño de la muestra.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \rightarrow N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C=\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z≈N(0,1) que verifica

$p(Z \le z_{1-\alpha/2})=1 - \alpha/2$

También sabemos que el *error máximo* de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, para el intervalo de la media, de donde n = $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2$.

a)

Obtenga un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, al 95%.

Datos desviación típica = σ = 0'25, tamaño de la muestra n = 8;

media muestral = $\overline{x}$ = (1'2 + 0'9 + 1 + 1'2 + 1'1 + 1 + 0'8 + 1'1)/8 = 1'0375

De 1 – α = 0'95, tenemos α = 1- 0'95 = 0'05, de donde α/2 = 0'05/2 = 0'025

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2})$ = 1 - α/2 = 1 - 0'025 = 0'975 mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'975 vemos que corresponde a $z_{1-\alpha/2} = z_{0'975}$ = 1'96, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

$$I.C=\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1'0375 - 1'96 \cdot \frac{0'25}{\sqrt{8}}, 1'0375 + 1'96 \cdot \frac{0'25}{\sqrt{8}}\right) = (0'864259; 1'21074)$$

b)

Halle el error máximo que se cometería usando el intervalo anterior.

Sabemos que el *error máximo* de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96.\frac{0'25}{\sqrt{8}}$ = 0'173241.

c)

Razone cómo variaría la amplitud del intervalo de confianza si, manteniendo el mismo nivel de confianza, aumentásemos el tamaño de la muestra.

Si aumentamos el tamaño de la muestra "n", el número $z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es más pequeño, porque dividimos por un número mayor, por tanto al sumarle y restarle una cantidad menor a $\overline{x}$, **se consigue un intervalo más pequeño, es decir de menor amplitud**.