SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2012 (MODELO 5)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

(2'5 puntos) Un comerciante dispone de 1200 euros para comprar dos tipos de manzanas A y B. Las del tipo A las compra a 0'60 euros/kg y las vende a 0'90 euros/kg, mientras que las del tipo B las compra a 1 euro/kg y las vende a 1'35 euros/kg.
Sabiendo que su vehículo a lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, ¿cuántos kilogramos de cada tipo deberá adquirir para que el beneficio que obtenga sea máximo? ¿Cuál sería ese beneficio?

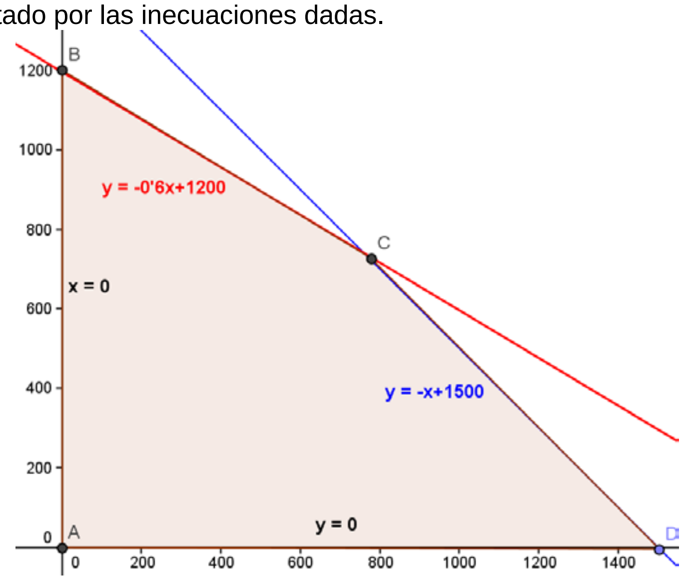
Solución

"x" = kilos de manzanas del tipo A
"y" = kilos de manzanas del tipo B
Función Beneficio **B(x,y) = F(x,y) =** lo que gana – lo que gasta = 0'9x – 0'6x + 1'35y – 1·y = **0'3x + 0'35y**.
Restricciones:
El comerciante compra 0 o más kilos de manzanas A o B, luego **x ≥ 0; y ≥ 0**;
A lo sumo puede transportar 1500 kg de manzanas, luego **x + y ≤ 1500**;
Dispone de 1200 euros para comprar dos tipos de manzanas A y B, luego **0'6x + 1·y ≤ 1200**;

Las desigualdades 0'6x + 1·y ≤ 1200; x + y ≤ 1500; x ≥ 0; y ≥ 0, las transformamos en igualdades, y ya son rectas, 0'6x + 1·y = 1200; x + y = 1500; x = 0; y = 0.

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos
y = -0'6x + 1200; y = -x + 1500; x =0; y = 0;

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.

De x = 0 e y = 0; tenemos **el punto de corte es A(0,0)**

De x = 0 e y = -0'6x + 1200; tenemos y = 1200, de donde **el punto de corte es B(0,1200)**

De y = -0'6x + 1200 e y = -x + 1500; tenemos -0'6x + 1200 = -x + 1500, de donde "0'4x = 300", es decir sale "x = 750" e "y = 750", y **el punto de corte es C(750,750)**

De y = 0 e y = -x + 1500; tenemos 0 = -x + 1500, de donde "x = 1500" e "y = 0", y **el punto de corte es D(1500,0)**

Vemos que **los vértices del recinto son: A(0,0); B(0,1200); C(750,750) y el D(1500,0).**

Calculemos los valores máximo y mínimo de la función F(x,y) = 0'3x + 0'35y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(0,0); B(0,1200); C(750,750) y el D(1500,0).

F(0,0) = 0'3(0) + 0'35(0) = 0; F(0,1200) = 0'3(0) + 0'35(1200) = 420
F(750,750) = 0'3(750) + 0'35(750) = **487'5**; F(1500,0) = 0'3(1500) + 0'35(0) = 450

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 487'5 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice C(750,750), es decir el beneficio máximo es de 487'5 € y se obtiene comprando 750 kg de manzanas tipo a y 750 kg de manzanas tipo B.

EJERCICIO 2_A

a) **(0'75 puntos)** Para la función *f* definida de la forma $f(x) = \frac{ax}{x+b}$, determine, razonadamente, los valores de *a* y *b* sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación x = -2 y como asíntota horizontal la de ecuación y = 3

b) **(1'75 puntos)** Para la función *g*, definida de la forma $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, determine: su dominio, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Con esos datos haga un esbozo de su gráfica.

Solución

a)

Para la función *f* definida de la forma $f(x) = \frac{ax}{x+b}$, determine, razonadamente, los valores de *a* y *b* sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación x = -2 y como asíntota horizontal la de ecuación y = 3

Sabemos que en los cocientes de polinomios las asíntotas verticales suelen ser los números que anulan el denominador, en nuestro caso x = - b, siempre que verifiquen que $\lim_{x\to -b} f(x) = \infty$.

En nuestro caso $\lim_{x\to -b} f(x) = \lim_{x\to -b} \frac{ax}{x+b}$ = -a·b/0 = ∞, luego x = - b, es una asíntota vertical y también sabemos que la asíntota vertical es x = -2, **luego b = 2.**

Sabemos que en los cocientes de polinomios de igual grado tienen una asíntota horizontal (es la misma en ±∞) y es y = al valor del $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

Como $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{ax}{x+b} = \lim_{x\to +\infty} \frac{ax}{x} = \lim_{x\to +\infty} (a) = a$, la asíntota horizontal es y = a, y también sabemos que la asíntota horizontal es y = 3, **luego a = 3.**

b)

Para la función *g*, definida de la forma $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, determine: su dominio, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Con esos datos haga un esbozo de su gráfica.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x).
$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Como es un polinomio es continua y derivable en R.
$g'(x) = 3x^2 - 6x$.
Si f '(x) = 0; tenemos $3x^2 - 6x = 0 = x(3x - 6) = 0$,de donde **x = 0** y **x = 2** que serán los posibles extremos relativos de g.

Como g '(-1) = $3(-1)^2 - 6(-1) = 9 > 0$, g(x) es **estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (-∞,0).**

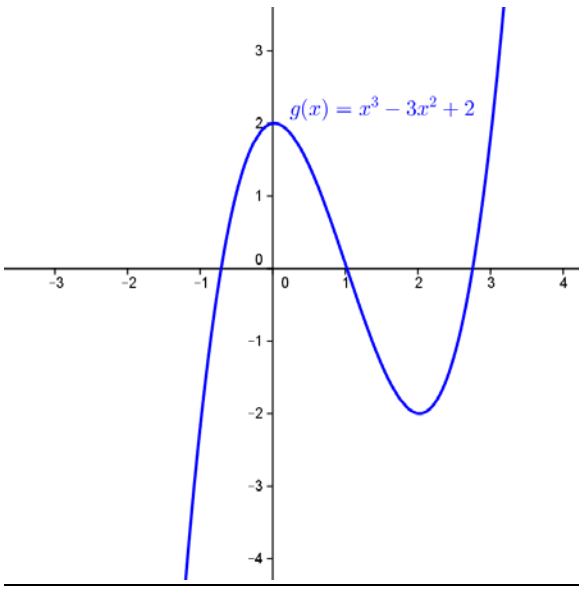
Como g '(1) = $3(1)^2 - 6(1) = -3 < 0$, g(x) es **estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en (0,2).**

Como g '(3) = $3(3)^2 - 6(3) = 9 > 0$, g(x) es **estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en (2,+∞).**

Por definición **x = 0 es un máximo relativo y vale g(0) = 2.**

Por definición **x = 2 es un mínimo relativo y vale g(2) = $(2)^3 - 3(2)^2 + 2 = -2$.**

Con estos datos un esbozo de la gráfica de g es:



EJERCICIO 3_A

Una empresa dispone de tres máquinas A, B y C, que fabrican, respectivamente, el 60%, 30% y 10% de los artículos que comercializa.

El 5% de los artículos que fabrica A, el 4% de los de B y el 3% de los de C son defectuosos. Elegido, al azar, un artículo de los que se fabrican en la empresa:

a) **(0'5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y esté fabricado por la máquina C?

b) **(1'25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

c) **(0'75 puntos)** Si sabemos que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?

Solución

Una empresa dispone de tres máquinas A, B y C, que fabrican, respectivamente, el 60%, 30% y 10% de los artículos que comercializa.

El 5% de los artículos que fabrica A, el 4% de los de B y el 3% de los de C son defectuosos. Elegido, al azar, un artículo de los que se fabrican en la empresa:

Llamemos A, B, C, D y D^C a los sucesos siguientes, "maquina A", "maquina B", " maquina C", "articulo defectuoso" y " articulo no defectuoso", respectivamente.

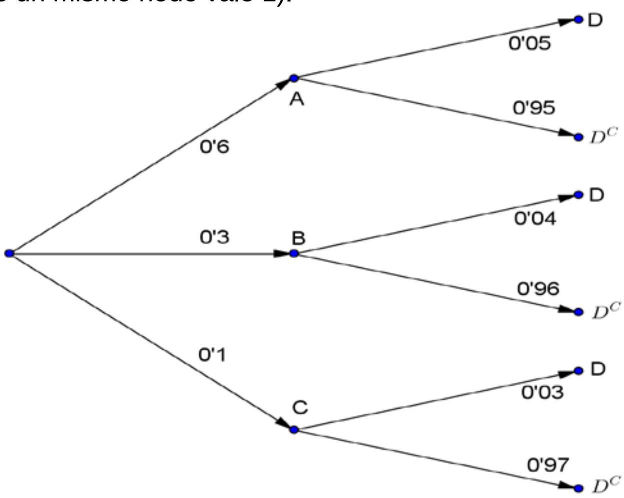
De A, B y C, que fabrican, respectivamente, el 60%, 30% y 10% de los artículos tenemos:

p(A) = 60% = 0'6; p(B) = 30% = 0'3; p(C) = 10% = 0'1;

El 5% de los artículos que fabrica A, el 4% de los de B y el 3% de los de C son defectuosos tenemos:

p(D/A) = 5% = 0'05; p(D/B) = 4% = 0'04; p(D/C) = 3% = 0'03;

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de ellas que parten de un mismo nodo vale 1).



(a)
¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso y esté fabricado por la máquina C?

Me piden **p(C∩D) =** p(C)·p(D/C) = 0'1·0'03 = **0'003**
(b)
¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuoso?

Aplicando el teorema de la probabilidad total, tenemos:

$$\mathbf{p(D^C) =} p(A).p(D^C/A) + p(B).p(D^C/B) + p(C).p(D^C/C) = 0'6\cdot0'95 + 0'3\cdot0'96 + 0'1\cdot0'97 = \mathbf{0'955.}$$

c)
Si sabemos que no es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la máquina A?

Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/D^C) =} \frac{p\left(A\cap D^C\right)}{p(D^C)} = \frac{p\left(A\right)\cdot p(D^C/A)}{p(D^C)} = \frac{0'6\cdot0'95}{0'955} = \mathbf{114/191 \cong 0'59686.}$$

EJERCICIO 4_A

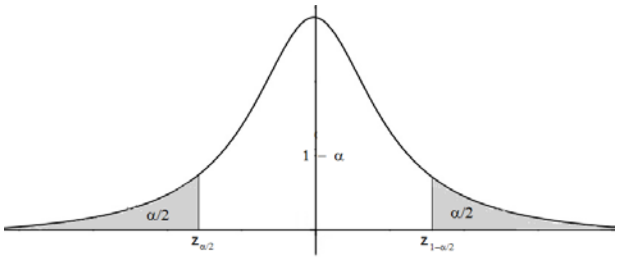
Una característica de una determinada población se distribuye según una variable aleatoria Normal *X* de media desconocida y desviación típica 0'9. Extraída al azar una muestra de tamaño 9 de esa población y observada *X*, dio como resultados:

10'5 10 8'5 10'5 11'5 13'5 9'5 13 12

a) **(1'25 puntos)** Halle un intervalo de confianza, al 99%, para la media de la variable *X*.
b) **(1'25 puntos)** Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa población, para que el error máximo que se cometa en la determinación de un intervalo de confianza para la media de *X* sea, a lo sumo, 0'3, con un nivel de confianza del 90%.

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una N(μ, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$), y generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$I.C.\ (\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = - z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada Z ≈ N(0,1) que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>error máximo</u> de la estimación es E = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$*.*

X se distribuye según una variable aleatoria Normal *X* de media desconocida y desviación típica 0'9. Extraída al azar una muestra de tamaño 9 de esa población y observada *X*, dio como resultados:

10'5 10 8'5 10'5 11'5 13'5 9'5 13 12

(a)
Halle un intervalo de confianza, al 99%, para la media de la variable *X*.

Datos del problema: σ = 0'9; n = 9; $\overline{x}$ = (10'5+10+8'5+10'5+11'5+13'5+9'5+13+12)/9 = 11; nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α = 0'01, con la cual α/2 = 0'005

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'005 = 0'995, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'995 vemos que no viene, sino que viene 0'9949 y 0'9941 que corresponden a z_1 = 2'57 y z_2 = 2'58. Realizando la media de dichos valores tenemos $z_{1-\alpha/2}$ = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(11 - 2'575\cdot\frac{0'9}{\sqrt{9}}, 11 + 2'575\cdot\frac{0'9}{\sqrt{9}}\right)$ **= (10'2275,11'7725)**

(b)
Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de esa población, para que el error máximo que se cometa en la determinación de un intervalo de confianza para la media de *X* sea, a lo sumo, 0'3, con un nivel de confianza del 90%.

Datos del problema: σ = 0'9; nivel de confianza = 90% = 0'90 = 1 - α, de donde α = 0'1, con la cual α/2 = 0'1/2 = 0'05; Error = E < 0'3

De p(Z ≤ $z_{1-\alpha/2}$) = 1 - α/2 = 1 - 0'05 = 0'95 mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'95 vemos que no viene, sino que viene 0'9495 y 0'99505 que corresponden a z_1 = 1'64 y z_2 = 1'65. Realizando la media de dichos valores tenemos $z_{1-\alpha/2}$ = (1'64 + 1'65)/2 = 1'645, por tanto tamaño mínimo pedido es:

$n > \left(\frac{z_{1-\alpha/2}.\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{1'645\cdot 0'9}{0'3}\right)^2 \cong$ 24'35, es decir **el tamaño mínimo es n = 25 personas**.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.
a) **(0'5 puntos)** Presente en una matriz *M*, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.
b) **(0'5 puntos)** Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, *A* (20 grandes y 30 pequeños) y *B* (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.
c) **(1'5 puntos)** Calcule los productos M·A y M·B e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

Solución

Los alumnos de 2º de Bachillerato organizan una venta de pasteles para el viaje de fin de curso. Venden pasteles grandes, que necesitan 2 huevos, 5 terrones de azúcar y 100 g de harina cada uno, y pasteles pequeños, que necesitan 1 huevo, 3 terrones de azúcar y 80 g de harina cada uno.
(a)
Presente en una matriz *M*, de dimensión 3x2, las cantidades de los elementos necesarios para la elaboración de un pastel grande y uno pequeño.

Sean H = nº de huevos, T = terrones de azúcar; Ha = gramos de harina; P = Pastel grande; ch = pastel chico.
La matriz pedida M_{3x2} es:

$$M_{3x2} = \begin{array}{c} \\ H \\ T \\ Ha \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} P & ch \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)
Si desean fabricar 20 pasteles de una clase y 30 de otra, escriba las dos matrices columna, *A* (20 grandes y 30 pequeños) y *B* (30 grandes y 20 pequeños) que representan este reparto.

Las matrices pedidas son:

$$A = \begin{array}{c} P \\ ch \end{array}\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{array}{c} P \\ ch \end{array}\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

(c)
Calcule los productos M·A y M·B e indique si con 8 docenas de huevos, 200 terrones de azúcar y 5 kg de harina se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños. ¿Y 30 grandes y 20 pequeños?

$$M\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 190 \\ 4400 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{huevos} \\ \text{terrones} \\ \text{harina} \end{array}$$

$$M\cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 100 & 80 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 210 \\ 4600 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{huevos} \\ \text{terrones} \\ \text{harina} \end{array}$$

Tenemos 8 docenas de huevos son 8·12 = 96 huevos; 200 terrones de azúcar y 5 kg = 5000 gr de harina´.

Si nos fijamos en los resultados del producto de matrices, **en el caso de M.A sobran huevos, sobran terrones de azúcar y sobran gramos de harina**. Luego vale A es decir **se pueden elaborar 20 pasteles grandes y 30 pequeños.**

Si nos fijamos en los resultados del producto de matrices, **en el caso de M.B sobran huevos, <u>faltan terrones de azúcar</u> y sobran gramos de harina**. Luego no vale B es decir **<u>no se pueden elaborar 30 pasteles grandes y 20 pequeños.</u>**

EJERCICIO 2_B

Sea la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x}{2} - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$.

a) **(1'5 puntos)** Calcule *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en *x* = 1.
b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función para *a* = 1'5 y *b* = 0'5.

Solución

a)
Calcule *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio y presente un mínimo en *x* = 1.

La función $ax^2 - 2x$ es continua en R, en particular en $x \le 2$.
La función $\frac{x}{2} - b$ es continua en R, en particular en x > 2.

Como f es continua en R, f es continua en x = 2, es decir $f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$.

$f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (ax^2 - 2x) = 4a – 4$.

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{2} - b\right) = 1 - b$.

Como f es continua en "x = 2", tenemos 4**a – 8 = 1 – b**.

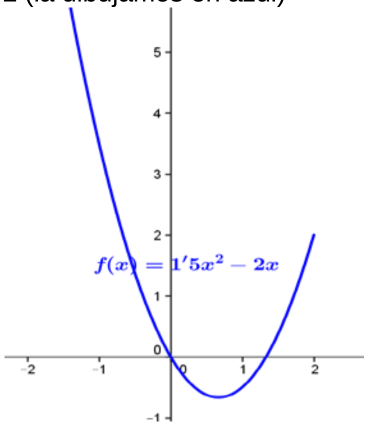
Como dicen que tiene un mínimo en x = 1, tenemos f'(1) = 0

Vemos que x = 1 está en $x \le 2$, donde $f(x) = ax^2 - 2x$, por tanto f'(x) = 2ax – 2.
De f'(1) = 0 tenemos 2a(1) – 2 = 0, de donde **a = 1**.
Entrando con a = 1 en 4**a – 8 = 1 – b**, tenemos 4(1) – 8 = 1 – b, de donde **b = 5**.
Los valores pedidos son a = 1 y b = 5.
(b)
Represente gráficamente la función para *a* = 1'5 y *b* = 0'5.

Para estos valores tenemos $f(x) = \begin{cases} 1'5x^2 - 2x & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x}{2} - 0'5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

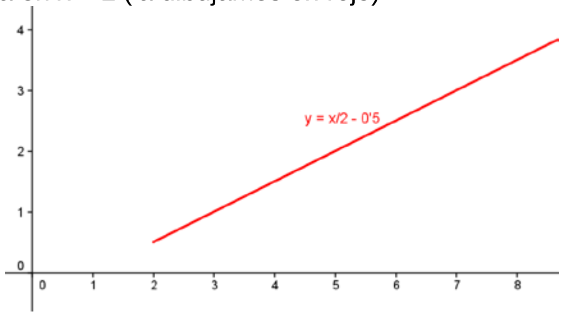
Si $x \le 2$, la función es $f(x) = 1'5x^2 - 2x = (3/2)\cdot x^2 - 2x$ cuya grafica es una parábola con las **ramas hacia arriba (∪).**
Abscisa del vértice V en la solución de $f'(x) = 0$, $f'(x) = 3x - 2 = 0$, de donde $x = 2/3 \cong 0'667$. **El vértice es V(2/3, f(2/3)) = V(2/3, -2/3)** $\cong$ (0'667,- 0'667). [$f(2/3) = 1'5(2/3^2 - 2(2/3) = - 2/3$].
Cortes con ejes. De $f(x) = 0 = (3/2)\cdot x^2 - 2x = x((3/2)\cdot x - 2) = 0$, luego $x = 0$ y $x = 4/3$. Puntos (0,0) y (4/3,0).

Recordamos que sólo se dibuja en $x \le 2$ (la dibujamos en azul)

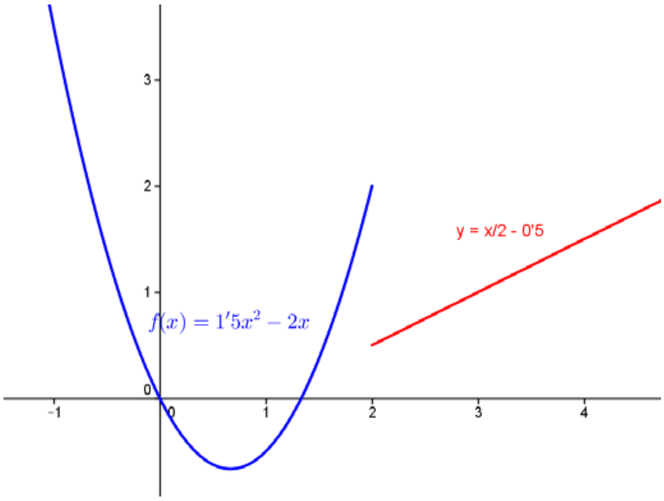


Si $x > 2$, la función es $f(x) = x/2 - 0'5$, que es una recta y con dos valores es suficiente
Para $x = 2^+$, $f(2^+) = 1 - 0'5 = 0'5$.
Para $x = 4$, $f(2^+) = 2 - 0'5 = 1'5$.

Recordamos que sólo se dibuja en $x > 2$ (la dibujamos en rojo)



Juntando ambas ramas tenemos



EJERCICIO 3_B

Se sabe que el 90% de los estudiantes del último curso de una Universidad está preocupado por sus posibilidades de encontrar trabajo, el 30% está preocupado por sus notas y el 25% por ambas cosas.
a) **(1'5 puntos)** Si hay 400 alumnos matriculados en el último curso de dicha Universidad, ¿cuántos de ellos no están preocupados por ninguna de las dos cosas?
b) **(1 punto)** Si un alumno del último curso, elegido al azar, no está preocupado por encontrar trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté preocupado por sus notas?

Solución

Llamemos T y N a los sucesos "preocupado por encontrar trabajo" y "preocupado por las notas", respectivamente

De el 90% de los estudiantes está preocupado por encontrar trabajo, tenemos p(T) = 90% = 0'9.
De el 30% de los estudiantes está preocupado por encontrar trabajo, tenemos p(N) = 30% = 0'3.
De el 25% de los estudiantes está preocupado por ambas cosas, tenemos $p(T\cap N)$ = 25% = 0'25.

a)
Si hay 400 alumnos matriculados en el último curso de dicha Universidad, ¿cuántos de ellos no están preocupados por ninguna de las dos cosas?

Recuerdo que nº de alumnos = Total de alumnos·Probabilidad.

Me están pidiendo p(noT y noN) = $p(T^C\cap P^C)$ = {Ley de Morgan} = $p(T\cup P)^C$ = {suceso contrario} =
= 1 - $p(T\cup P)$ = 1 – (*) = 1 – 0'95 = 0'05

Alumnos no preocupados alumnos por ninguna de las dos cosas **= 400·0'05 = 20**.

(*) = $p(T\cup P) = p(T) + p(N) - p(T\cap N)$ = 0'9 + 0'3 - 0'25 = 0'95.

b)
Si un alumno del último curso, elegido al azar, no está preocupado por encontrar trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté preocupado por sus notas?

Me están pidiendo p(N/noT) = $\mathbf{p(N/T^C)} = \dfrac{p(N\cap T^C)}{p(T^C)} = \dfrac{p(N)\text{-}p(N\cap T)}{1\text{-}p(T)}$ = (0'3-0'25)/(1-0'9) **= 0'5**

EJERCICIO 4_B

(2'5 puntos) Se cree que al menos el 25% de los usuarios de teléfonos móviles son de contrato. De una encuesta realizada a 950 personas, elegida al azar, 200 de ellas manifestaron que tenían teléfono móvil de contrato. A la vista de estos resultados y con un nivel de significación del 5%, ¿puede admitirse que la proporción de personas con contrato en su teléfono móvil ha disminuido? Utilice para la resolución del problema un contraste de hipótesis con hipótesis nula "la proporción *p* es mayor o igual que 0'25".

Solución

Nos dice el problema que la hipótesis nula es $H_0 : p_0 \geq$ 0'25, para ver las personas que tienen móvil de contrato con un nivel de significación del 5%.

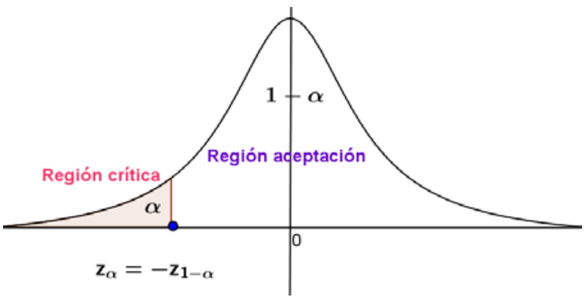
Datos del problema: p_0 = 0'25; n = 950; $\hat{p}$ = 200/950 $\cong$ 0'2105; región crítica = α = 5% = 0'05.

Etapa 1: Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : p_0 \geq$ 0'25 (al menos el 25% tienen móvil de contrato) y $H_1 : p_0 <$ 0'25, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: El nivel de significación es α = 0'05, luego tenemos 1 - α = 0,95.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha})$ = 1 - α = 1 – 0'05 = 0'95, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es la mitad de 0'9495 y 0'9505, que corresponde a $z_{1-\alpha}$ = (1'64+1'65)/2 =
= 1'645 , con lo cual el **valor crítico** es $z_\alpha = - z_{1-\alpha}$ = - 1'645 que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapa 3 y 4: En este caso el **estadístico de prueba** es $Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0.(1-p_0)}{n}}}$, que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0.(1-p_0)/n}}$ =

$$= \frac{0'2105 - 0'25}{\sqrt{\frac{0'25 \cdot 0'75}{950}}} \cong -2'812.$$

Etapa 5: Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -2'812 es menor que el **valor crítico** z_α = - $z_{1-\alpha}$ = - 1'645, vemos que nos encontramos en la región de rechazo ó región crítica. Por tanto, **tomamos la decisión de la rechazar hipótesis nula H_0:** $p_0 \geq 0'25$**, y aceptar la hipótesis alternativa H_1 : $p_0 < 0'25$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 5%, afirmamos que <u>menos del 25%</u> de los usuarios tienen móvil de contrato.