SELECTIVIDAD ANDALUCÍA MATEMÁTICAS CCSS SOBRANTES 2012 (MODELO 6)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1_A

Una empresa vende tres artículos diferentes A, B y C, cada uno de ellos en dos formatos, grande y normal. En la matriz *F* se indican las cantidades de los tres artículos, en cada uno de los dos formatos, que ha vendido la empresa en un mes. En la matriz *G* se indican las ganancias, en euros, que obtiene la empresa por cada unidad que ha vendido de cada artículo en cada formato

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ F = & \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ G = & \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \end{array}$$

a) **(1 punto)** Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$.

b) **(0'75 puntos)** Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas de cada uno de los tres artículos y especifique cuáles son esas ganancias.

c) **(0'75 puntos)** Indique en qué matriz se pueden encontrar las ganancias que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas en cada uno de los dos formatos, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

Solución

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ F = & \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \\ & \text{Cantidades} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ G = & \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \\ & \text{Ganancias} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{grande} \\ \leftarrow \text{normal} \\ \\ \end{array}$$

(a)

Efectúe los productos $F^t \cdot G$ y $F \cdot G^t$.

$$F^t \cdot G = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 150 & 250 \\ 80 & 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1400 & 1800 & 1100 \\ 1900 & 2450 & 1500 \\ 1040 & 1340 & 820 \end{pmatrix}$$

$$F \cdot G^t = \begin{pmatrix} 100 & 150 & 80 \\ 200 & 250 & 140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2200 & 1390 \\ 3900 & 2470 \end{pmatrix}$$

(b)

Indique en qué matriz se pueden encontrar las **ganancias** que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas **de cada uno de los tres artículos** y especifique cuáles son esas ganancias.

Las ganancias de cada uno de los tres artículos es la <u>diagonal principal de la matriz $F \cdot G^t$</u>
1400 ganancias del artículo A
2450 ganancias del artículo B
820 ganancias del artículo C

(c)

Indique en qué matriz se pueden encontrar las **ganancias** que ha recibido la empresa en ese mes por el total de las unidades vendidas **en cada uno de los dos formatos**, especifique cuáles son esas ganancias y halle la ganancia total.

Las ganancias de cada uno de los formatos es la la <u>diagonal principal de la matriz $F^t \cdot G$</u>
2200 ganancias del formato grande
2470 ganancias del formato normal.

La ganancia total es 2200 + 2470 = 4670.

EJERCICIO 2_A

Sean dos funciones, *f* y *g*, tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, $f'(x)= x + 2$ y $g'(x) = 2$.

a) **(1 punto)** Estudie la monotonía de las funciones *f* y *g*.

b) **(0'75 puntos)** De las dos funciones *f* y *g*, indique, razonadamente, cuál de ellas tiene algún punto en el que su derivada es nula.

c) **(0'75 puntos)** ¿Cuál de las funciones *f* y *g* es una función polinómica de primer grado? ¿Por qué?

Solución

Sean dos funciones, *f* y *g*, tales que las expresiones de sus funciones derivadas son, respectivamente, f'(x)= x + 2 y g'(x) = 2.
(a) y (b)
Estudie la monotonía de las funciones *f* y *g*.

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de f '(x) y de g'(x).

f'(x) = x + 2
Si f '(x) = 0; tenemos x + 2 = 0, de donde **x = -2**, que puede ser el posible extremo relativo.

Como f '(-3) = -1 < 0, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en (-∞,-2).

Como f '(0) = 2 > 0, f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en (-2,+ ∞).

Por definición x = -2 es un mínimo relativo de f. (tiene derivada nula)

g'(x) = 2
Si g '(x) = 0; tenemos **2 = 0**, lo cual es absurdo, luego **g no tiene extremos (no tiene derivada nula)**

y siempre es creciente o decreciente.

Como g '(0) = 2 > 0, g(x) siempre es estrictamente creciente $(\nearrow)$.

(c)
¿Cuál de las funciones *f* y *g* es una función polinómica de primer grado? ¿Por qué?

Sabemos que en las funciones polinómicas, la derivada gasta un grado porque si $f(x) = x^k$, $f'(x) = k\cdot x^{k-1}$
Como g'(x) = 2, g(x) es de primer grado, porque al derivar desaparece la x.

EJERCICIO 3_A

Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.
a) **(0'75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea blanca.
b) **(0'5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca sabiendo que está marcada?
c) **(0'5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?
d) **(0'75 puntos)** ¿Son independientes los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca"?

Solución

Una urna contiene 25 bolas blancas sin marcar, 75 bolas blancas marcadas, 125 bolas negras sin marcar y 175 bolas negras marcadas. Se extrae una bola al azar.

Total de bolas = 400
Total de bolas blancas = 100. Marcadas 75 y sin marcar 25.
Total de bolas negras = 300. Marcadas 175 y sin marcar 125.

Este problema es muy fácil de realizar utilizando una **tabla de contingencia** (tabla de doble entrada), y después utilizando la definición de probabilidad de Laplace (número de casos favorables partido por número de casos posibles).

	Blancas = B	Negras = N	Totales
Marcadas = M	75	175	
No marcadas = M^C	25	125	
Totales	100	300	400

Completamos la tabla de contingencia sabiendo que tanto la suma en horizontal como en vertical dan los totales. He puesto en negrita los números que he completado.

	Blancas = B	Negras = N	Totales
Marcadas = M	75	175	**250**
No marcadas = M^C	25	125	**150**
Totales	100	300	400

(a)

Calcule la probabilidad de que sea blanca.

p("bola blanca") = p("B") = $\dfrac{\text{Total de bolas blancas}}{\text{Total de bolas}} = \dfrac{100}{400}$ **= 0'25.**

(b)
¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca sabiendo que está marcada?

p("Bola blanca sabiendo que está marcada") = p("B/M") = $\dfrac{\text{Bolas blancas marcadas}}{\text{Total bolas marcadas}} = \dfrac{75}{250}$ **= 0'3.**

(c)
¿Cuál es la probabilidad de que sea negra y esté marcada?

p("Bola negra y esté marcada") = p("N$\cap$M") = $\dfrac{\text{Bola negra y marcada}}{\text{Total bolas}} = \dfrac{175}{400}$ **= 0'4375.**

(d)
¿Son independientes los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca"?

Son independientes si p(M)·p(B) = p(M$\cap$B)

p(B) = 0'25; p(M) = $\dfrac{\text{Total de bolas marcadas}}{\text{Total de bolas}} = \dfrac{250}{400}$ = 0'625;

p(M$\cap$B) = $\dfrac{\text{Bola blanca y marcada}}{\text{Total bolas}} = \dfrac{75}{400}$ = 0'1875.

Como 0'25·0'625 $\neq$ 0'1875, los sucesos "sacar bola marcada" y "sacar bola blanca" son dependientes.

EJERCICIO 4_A

(2'5 puntos) Un índice para calibrar la madurez lectora de los alumnos de primaria se distribuye según una ley Normal con desviación típica 2. Elegida una muestra de 18 alumnos en un centro de primaria, se obtiene una media muestral de 10'8 en dicho índice. Mediante el uso de un contraste de hipótesis, ¿se puede aceptar, con un nivel de significación del 1%, la hipótesis nula de que la media del índice de madurez lectora de los alumnos de este centro no es inferior a 11?

Solución

Trabajamos en la normal N(0,1), tipificada de la normal muestral.

Nos dice el problema que la hipótesis nula es $H_0 : \mu_0 \geq 11$, para ver la madurez lectora de los alumnos de primaria con un nivel de significación del 1%, por tanto la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu_0 < 11$

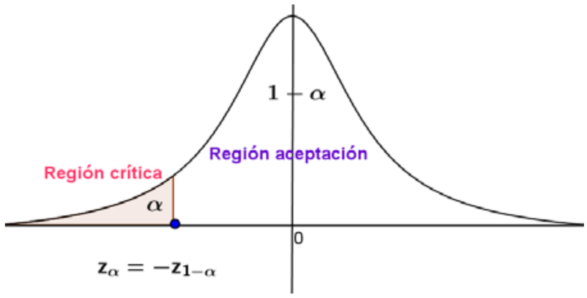
Datos del problema: $\mu_0 = 11$; n = 180; $\overline{x} = 10'8$; $\sigma = 2$; región crítica = α = 1% = 0'01.

Etapa 1: Las hipótesis nula y alternativa son: $H_0 : \mu_0 \geq 11$ (la madurez lectora de los alumnos no es inferior a 11) y $H_1 : \mu_0 < 11$, la cual *nos indica la dirección del contraste*, *es decir la región crítica esta a la izquierda del punto crítico* $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

Etapa 2: El nivel de significación es α = 0'01, luego tenemos 1 - α = 0,99.

De $p(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha = 1 - 0'01 = 0'99$, mirando en las tablas de la N(0,1), vemos que no aparece en las tablas. El valor más próximo es 0'9901, que corresponde al **valor crítico** es $z_\alpha = -z_{1-\alpha} = -2'33$ que separa las zonas de aceptación y rechazo.

Lo observamos en un dibujo:



Etapa 3 y 4: En este caso el **estadístico de prueba** de este contraste es $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$, que sigue una ley normal N(0,1).que sigue una normal tipificada, N(0,1), y el **valor observado del estadístico de prueba** será el número $z_0 = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{10'8 - 11}{2/\sqrt{18}} \cong$ -0'4243

Etapa 5: Como el **valor observado del estadístico de prueba** z_0 = -0'4243 es mayor que el **valor crítico** z_α = - $z_{1-\alpha}$ = - 2'33, vemos que nos encontramos en la región de aceptación. Por tanto, **tomamos la decisión de la aceptar la hipótesis nula H_0: $\mu_0 \geq 11$.**

Con lo cual, con una probabilidad de equivocarnos del 1%, afirmamos que la media del índice de madurez lectora de los alumnos del centro es superior a 11".

OPCIÓN B

EJERCICIO 1_B

(2'5 puntos) En una carpintería se construyen dos tipos de estanterías: grandes y pequeñas, y se tienen para ello 60 m^2 de tableros de madera. Las grandes necesitan 4 m^2 de tablero y las pequeñas 3 m^2. El carpintero debe hacer como mínimo 3 estanterías grandes, y el número de pequeñas que haga debe ser, al menos, el doble del número de las grandes. Si la ganancia por cada estantería grande es de 60 euros y por cada una de las pequeñas es de 40 euros, ¿cuántas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Solución

"x" = Estantería grande
"y" = Estantería pequeña
Función Beneficio **B(x,y) = F(x,y) =** lo que gana = 60x + 40y = **60x + 40y**.
Restricciones:
Tienen para ello 60 m^2 de tableros. Las grandes necesitan 4 m^2 de tablero y las pequeñas 3 m^2 de tablero , luego 4**x + 3y ≤ 60**
Debe hacer como mínimo 3 estanterías grandes, y de pequeñas, al menos, el doble del número de las grandes, luego **x ≥ 3; y ≥ x**;

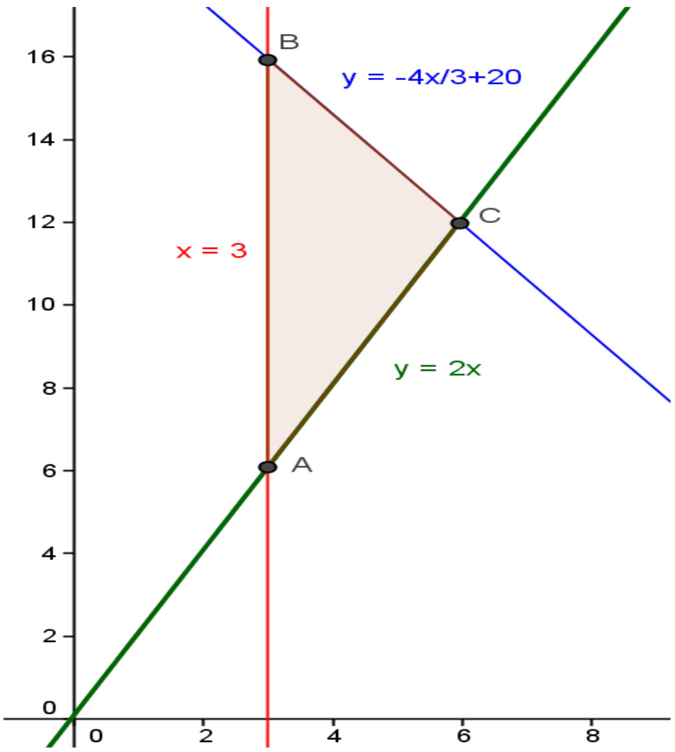
Las desigualdades $4x + 3y \leq 60$; $x \geq 3$; $y \geq 2x$, las transformamos en igualdades, y ya son rectas,

$$4x + 3y \leq 60; \quad x \geq 3; \quad y \geq 2x$$

Para que nos sea más fácil dibujar las rectas (con dos valores es suficiente), despejamos las "y" y tenemos

$$y = -4x/3 + 20; \quad x = 3; \quad y = 2x;$$

Representamos gráficamente las rectas que verifican estas igualdades, y el recinto en el cual estarán los bordes del recinto delimitado por las inecuaciones dadas.



Calculamos los vértices del recinto resolviendo las ecuaciones las rectas de dos en dos.
De x = 3 e y = 2x; tenemos **el punto de corte es A(3,6)**

De x = 3 e y = -4x/3 + 20; tenemos **el punto de corte es A(3,16)**

De y = 2x e y = -4x/3 + 20; tenemos 2x = -4x/3 + 20, de donde "6x = -4x + 60", es decir sale "10x = 60", luego "x = 6" e y = 12", y **el punto de corte es C(6,12)**

Vemos que **los vértices del recinto son: A(3,6); B(3,16) y C(6,12).**

Calculemos los valores máximo y mínimo de la función F(x,y) = 60x + 40y en dicha región.

El Teorema Fundamental de la Programación Lineal afirma que su máximo y mínimo absoluto están en la región acotada, y que estos extremos deben estar situados en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos F en los puntos anteriores A(3,6); B(3,16) y el C(6,12).

F(3,6) = 60(3) + 40(6) = 420; F(3,16) = 60(3) + 40(16) = 820**;** F(6,12) = 60(6) + 40(12) = **840**

Teniendo en cuenta lo anterior vemos que el máximo absoluto de la función F en la región es 840 (el valor mayor en los vértices) y se alcanza en el vértice C(6,12), es decir el beneficio máximo es de 840 € y se obtiene haciendo 6 estanterías grandes y 12 estanterías pequeñas.

EJERCICIO 2_B

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) **(0'8 puntos)** $f(x) = e^{3x}\cdot\ln(2x - 5)$.

b) **(0'8 puntos)** $g(x) = \dfrac{3^{2x}}{x^2 - 1}$.

c) **(0'9 puntos)** $h(x) = (3x^2 + 5x - 1)^6 + x^2 - \ln(x)$.

Solución

Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{2^x + x^2}{x}\ ; \quad g(x) = (x^2 + 1)^2 - \ln(e^{3x} + 4)\ ; \quad h(x) = \frac{1}{3x} - \frac{5}{x^2 - 2}$$

Recordamos algunas derivadas y reglas de derivación. También algo sobre extremos absolutos

$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$; $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x)+ f(x)\cdot g'(x)$; $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$;

($(f(x)^k)' = k.f(x)^{k-1}.f'(x)$; $(a^x)' = a^x.\ln(a)$; $(e^{kx})' = k.e^{kx}$; $(x^k)' = k.x^{k-1}$; $(\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$; $(k)' = 0$.

a)
$f(x) = e^{3x}\cdot\ln(2x - 5)$.

$f'(x) = 3\cdot e^{3x}\cdot\ln(2x - 5) + e^{3x}\cdot 2/(2x - 5)$.

b)

$$g(x) = \frac{3^{2x}}{x^2 - 1}.$$

$$g'(x) = \frac{2\cdot 3^{2x}\cdot(x^2-1) - 3^{2x}\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2\cdot 3^{2x}\cdot(x^2 - x - 1)}{(x^2-1)^2}.$$

c)
$h(x) = (3x^2 + 5x - 1)^6 + x^2 - \ln(x)$.

$h'(x) = 6\cdot(3x^2 + 5x - 1)^5\cdot(6x + 5) + 2x - 1/x$.

EJERCICIO 3_B

Se consideran dos sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que p(A) = 0'8, p(B) = 0'7, p(A∪B) = 0'94.
a) **(1 punto)** ¿Son *A* y *B* sucesos independientes?
b) **(1 punto)** Calcule p(A/B).
c) **(0'5 puntos)** Calcule $p(A^C \cup B^C)$.

Solución

Se consideran dos sucesos *A* y *B* asociados a un experimento aleatorio. Se sabe que p(A) = 0'8, p(B) = 0'7, p(A∪B) = 0'94.
a)
¿Son *A* y *B* sucesos independientes?

A y B son independientes si p(A)·p(B) = p(A∩B)

De p(A∪B) = p(A) + p(B) - p(A∩B) tenemos p(A∩B) = p(A) + p(B) - p(A∪B) = 0'8 + 0'7 – 0'94 = 0'56.

Como p(A)·p(B) = 0'8·0'7 = 0'56 = p(A∩B), los sucesos son independientes.

b)
Calcule p(A/B).

p(A/B) = $\frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ = 0'56/0'7 **= 0'8**.

c)
Calcule $p(A^C \cup B^C)$.

$p(A^C \cup B^C)$ = {ley de Morgan} = $p(A\cap B)^C$ = {suceso contrario} = 1 - p(A∩B) = 1 – 0'56 **= 0'44**

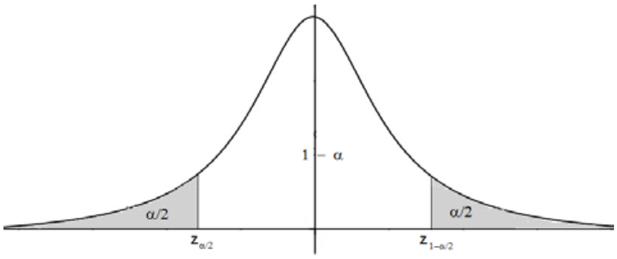
EJERCICIO 4_B

La velocidad a la que circulan los conductores por una autopista sigue una distribución N(μ,20). En un control efectuado a 100 conductores elegidos al azar ha resultado una velocidad media de 110 km/h.
a) **(2 puntos)** Determine el intervalo de confianza para μ, con un nivel del 99%.
b) **(0'5 puntos)** ¿Cuál es el máximo error cometido en esta estimación?

Solución

Sabemos que para la media poblacional **μ**, el *estimador* MEDIA MUESTRAL $\overline{X}$, sigue una $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, y

generalmente escribimos $\overline{X} \approx N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ o $\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$



También sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media es:

$$\text{I.C. }(\mu) = \left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ y $z_{\alpha/2} = -z_{1-\alpha/2}$ *es el punto crítico* de la variable aleatoria Normal tipificada $Z \approx N(0,1)$ que verifica $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$

También sabemos que el <u>*error máximo*</u> *de la estimación es E =* $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$*, para el intervalo de la media, de donde el tamaño mínimo de la muestra es n =* $\left(\frac{z_{1-\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$.

La velocidad a la que circulan los conductores por una autopista sigue una distribución $N(\mu,20)$. En un control efectuado a 100 conductores elegidos al azar ha resultado una velocidad media de 110 km/h.

a)

Determine el intervalo de confianza para **μ**, con un nivel del 99%.

Datos del problema: $\sigma = 20$; $n = 100$; $\overline{x} = 110$; nivel de confianza = 99% = 0'99 = 1 - α, de donde α=0'01, con la cual α/2 = 0'005

De $p(Z \le z_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha/2 = 1 - 0'005 = 0'995$, mirando en las tablas de la N(0,1) la probabilidad 0'995 vemos que no viene, sino que viene 0'9949 y 0'9941 que corresponden a $z_1 = 2'57$ y $z_2 = 2'58$. Realizando la media de dichos valores tenemos $z_{1-\alpha/2} = (2'57 + 2'58)/2 = 2'575$, por tanto el intervalo de confianza pedido es:

I.C. (μ) = $\left(\overline{x} - z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(110 - 2'575\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}, 110 + 2'575\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}\right)$ **= (104'85,115'15)**

b)

¿Cuál es el máximo error cometido en esta estimación?

Datos del problema: $\sigma = 20$; $n = 100$; nivel de confianza = 99%, de donde $z_{1-\alpha/2} = 2'575$.

Sabemos que el **error máximo** de la estimación es **E** = $z_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'575\cdot\frac{20}{\sqrt{100}}$ = **5'15 km/h**